



## An Integer Programming Mathematical Model for Optimization of Stope Boundaries in Underground Mine Operations

Vahid Nikbin<sup>1\*</sup>, Majid Ataeipour<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Assistant Professor, Mining Department, Faculty of Engineering, University of Zanjan; nikbin@znu.ac.ir

<sup>2</sup> Assistant Professor, Faculty of Mining Engineering, Amirkabir University of Technology; map60@aut.ac.ir

Received: 2024/02/27 - Accepted: 2025/04/06

### ABSTRACT

Today, underground mining has a small share of mineral production worldwide. However, underground mining is expected to receive more attention soon due to the extraction of most surface deposits, increasing pit depth, and environmental issues. Stope boundary optimization (SBO), development network, and production scheduling are three main problems in underground mine planning, which are affected by numerous shortcomings and oversimplifications. To overcome one of these shortcomings, a new Integer Linear Programming (ILP) model has been introduced in this article to solve the SBO problem. The new proposed model guarantees an optimal solution and could accelerate problem-solving using an efficient variable reduction technique. Implementing the new proposed model on a hypothetical example and accurate data confirmed its ability to produce robust solutions in a reasonable computation time. We strongly believe that further improvement in the solving process is still possible by using variable reduction, decomposition methods, or relaxation techniques.

### Keywords

Optimization, Underground Stopes, Underground Mining, Mathematical Model, Mixed Integer Programming

---

\* Corresponding author and correspondent



## 1- INTRODUCTION

Switching in mining methods from open-pit to underground is a phenomenon we can see worldwide. Their main reasons are the extraction of most surface deposits, increasing pit depth, and negative environmental impacts due to producing a high amount of waste materials. As a result, the role of underground mining as another alternative is frequently highlighted. As a result, it is expected that the portion of underground mining in global mineral production will increase to higher levels [1]. Therefore, designing efficient optimization methods and software packages is necessary for underground mine planners. Stope boundary optimization (SBO), decline network optimization, and underground production scheduling are three main problems in underground mine planning that suffer from different weaknesses. There is no comprehensive, fast, and rigorous optimization method.

This article focuses on solving the SBO problem by introducing a new Integer Linear Programming (ILP) model. Current optimization methods suffer from one or all of the following drawbacks:

- Different simplifications
- high runtime
- producing non-optimal solutions
- fail to solve Large scale problems

The new ILP model aims to overcome these shortcomings. It guarantees optimal solutions and accelerates the solving process regardless of the size of the problem.

The SBO problem was first addressed using an approximate dynamic programming method, which can be used in block-caving mining [2]. This two-dimensional algorithm also fails to find an optimal solution and is just proposed for use in a specific underground mining method [3]. After that, and especially in recent years, many researchers have tried to solve this problem; however, their methods suffer from one or all of the drawbacks above [4-23].

## 2- METHODOLOGY

The following equations introduce A new MILP model (EQs 1-12). Using a binary decision variable, we select a stope in our solution. If the value of  $y_{ijk}$  becomes one, it means that stope  $S_{ijk}$  is selected; otherwise, it is not specified. Since the shape of stopes is a cube, overlapping of stopes is possible. As a result, the value of all blocks inside the intersection area is counted more than once. This problem may lead to wrong decisions. To overcome this challenge, we first recognize these blocks by  $x_{ijk}$  then we find overcounting by  $\alpha_{ijk}$ . Finally, we subtraction  $\sum_{(i,j,k)} p_{ijk} \times \alpha_{ijk}$  from  $\sum_{(i,j,k) \in \Delta} v_{ijk} \times y_{ijk}$ . If block  $b_{ijk}$  falls in the overlapping area, it means that this block belongs to more than one stope, then  $x_{ijk}$  returns one.

As shown in Figure 1, suppose that block  $b_{ijk}$  Falls in the gray color area. This gray area is common between stope No.1 and stope No.2. In this situation, the value of both  $x_{ijk}$  and  $\alpha_{ijk}$  variables become one. So, by subtracting  $p_{ijk}$  From the objective function, its value becomes true.

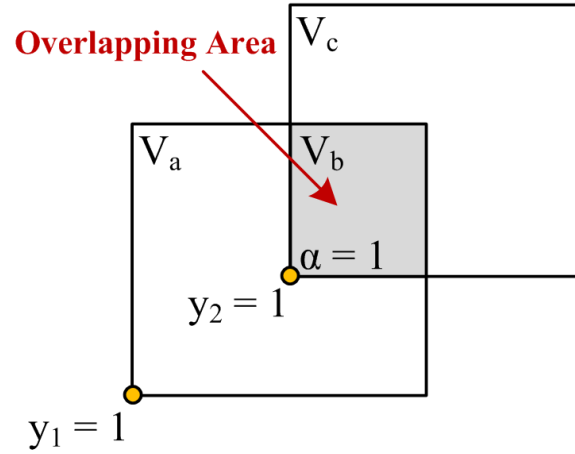


Figure (1): Overlapping of two stopes

$$Z = \max \sum_{(i,j,k) \in \Delta} v_{ijk} \times y_{ijk} - \sum_{(i,j,k)} p_{ijk} \times \alpha_{ijk} \tag{1}$$

Subject to:

$$\sum_{(i',j',k') \in \Delta | b_{ijk} \in S_{i'j'k'}} y_{i'j'k'} = x_{ijk} + \alpha_{ijk} \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \tag{2}$$

$$d_x \times d_y \times d_z \times y_{ijk} \leq \sum_{(i',j',k') \in S_{ijk}} x_{i'j'k'} \quad \forall (i,j,k) \in \Delta \tag{3}$$

$$\sum_{i'=i}^{i+D_x} x_{i'jk} \leq D_x \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \tag{4}$$

$$\sum_{j'=j}^{j+D_y} x_{ij'k} \leq D_y \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \tag{5}$$

$$\sum_{k'=k}^{k+D_z} x_{ijk'} \leq D_z \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \tag{6}$$

$$(R_x - 1)(x_{(i-1)jk} - x_{ijk}) \leq \sum_{i'=i+1}^{i+R_x-1} 1 - x_{i'jk} \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \tag{7}$$

$$(R_y - 1)(x_{i(j-1)k} - x_{ijk}) \leq \sum_{j'=j+1}^{j+R_y-1} 1 - x_{ij'k} \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \tag{8}$$

$$(R_z - 1)(x_{ijk(k-1)} - x_{ijk}) \leq \sum_{k'=k+1}^{k+R_z-1} 1 - x_{ijk'} \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \tag{9}$$

$$y_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j,k) \in \Delta \tag{10}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \tag{11}$$

$$\alpha_{ijk} \in \{0,1, \dots, U\} \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \tag{12}$$

### 3- CONCLUSION

The reasonable anticipations tell us that due to the extraction of most surface deposits, environmental issues, and the production of high amounts of waste materials in open-pit mine operations, mining companies will pay more attention to underground mining shortly as a more profitable method. Despite the critical role of underground mine planning in mining industries, a few algorithms and computer programs have been developed in this field compared to open-pit mine planning. This is mainly due to the inherent complexity, uncertainty, and variety of underground mining methods. The slope boundary optimization problem falls under the category of underground mine planning, but it has significant effects on other issues. Although mine planning researchers have paid more attention to solving this problem in recent years, we don't observe a fast, optimal, and comprehensive method today. So, a new ILP model is proposed in this article to overcome the current shortcomings of the SBO problem. This model is supported by a variable reduction technique to produce fast solutions. Implementation of the new proposed model on a lead-zinc deposit confirmed that it can provide optimal solutions with less computation efforts.

### REFERENCES

1. Nikbin, V., Ataee-Pour, M., Anani, A., "Optimization of level intervals in steeply-dipping vein deposits: A two-step approach," *Resources Policy*, No. 69, pp. 1 – 12, 2020.
2. Riddle, J. M., "A dynamic programming solution of a block-caving mine layout," *The 14th APCOM Symposium, Society of Mining Engineers-American Institute of Mining, Metallurgy, and Petroleum Engineers, New York*, 767 - 772, 1977.
3. Nikbin, V., Ataee-Pour, M., Shahriar, K., Pourrahimian, Y., "A Greedy Algorithm for Stope Boundaries Optimization," *8th Annual Report Mining Optimization Laboratory (MOL)*, pp. 246-252, 2017.
4. Ovanic, J., Young, D. S., "Optimisation of stope geometry using separable programming with special branch and bound techniques," *Third Canadian Conference on Computer Applications in the Mineral Industry*, McGill University, Montreal 129 - 135, 1995.
5. Alford, C., "Optimisation in underground mine design," *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics*, No. 5, 1996.
6. Ataee-Pour, M., "A heuristic algorithm to optimize stope boundaries," *Doctor of Philosophy, University of Wollongong, New South Wales*, 2000.
7. Topal, E., Sens, J., "A new algorithm for stope boundary optimization," *Journal of Coal Science and Engineering (China)*, No. 16 (2), pp. 113 – 119, 2010.
8. Bai, X., Marcotte, D., Simon, R., "Underground stope optimization with network flow method," *Computers & Geosciences*, No. 52, pp. 361 – 371, 2013.
9. Bai, X., Marcotte, D., Simon, R., "A heuristic sublevel stope optimizer with multiple raises," *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, No. 114 (6), pp. 427 – 434, 2014.
10. Nelis, G., Gamache, M., Marcotte, D., Bai, X., "Stope optimization with vertical convexity constraints," *Optimization and Engineering*, No. 17 (4), pp. 813 – 832, 2016.
11. Senanayake, D. S. S., Topal, E., Asad, M. W. A., "Designing an optimal stope layout for underground mining based on a heuristic algorithm," *International Journal of Mining Science and Technology*, No. 25 (5), pp. 767 – 772, 2015.
12. Nikbin, V., Ataee-Pour, M., Shahriar, K., Pourrahimian, Y., MirHassani, SA., "Stope boundary optimization: A mathematical model and efficient heuristics," *Resources Policy*, No. 62, pp. 515 – 526, 2019.
13. Hou, J., Xu, C., Dowd, P., Li, G., "Integrated optimization of stope boundary and access layout for underground mining operations," *Mining Technology*, No. 128 (4), pp. 193 – 205, 2019.

14. Nikbin, V., Ataee-Pour, M., Shahriar, K., Pourrahimian, Y., "A 3D approximate hybrid algorithm for stope boundary optimization", *Computers & Operations Research*, No. 115, pp. 1 – 9, 2020.
15. Asli Sari, Y., Kumral, M., "Sublevel stope layout planning through a greedy heuristic approach based on dynamic programming," *Journal of the Operational Research Society*, pp. 1 – 10, 2020.
16. Nikbin, V., M. Ataee-pour., "An Integer Programming Algorithm for Stope Layout Optimization," *Amirkabir Journal of Civil Engineering*, No. 48 (3), pp. 329-338, 2016.
17. Nikbin, V., Mardaneh, E., M., Asad, M. W. A., Topal, E., "Pattern search method for accelerating Stope boundary optimization problem in underground mining operations," *Engineering Optimization*, No. 54 (5), pp. 1 – 13, 2021.
18. Furtado, M., Dimitrakopoulos, R., Pinto, C., "Stochastic stope design optimization under grade uncertainty and dynamic development costs," *International Journal of Mining, Reclamation, and Environment*, Vol. 36 (2), pp. 1-23, 2021.
19. Sari, Y. A., Kumral, M., "Clustering-based iterative approach to stope layout optimization for sublevel stoping," *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, Vol. 121 (3), pp. 97-106, 2021.
20. Morales, N., Mancilla, D., Miranda, R., Vallejos, J., "A fast method to develop an optimal operational sublevel stope design," *Resources Policy*, No. 77, 2022.
21. Nhleko, S., Musingwini, C., "Optimisation of Three-Dimensional Stope Layouts Using a Dual Interchange Algorithm for Improved Value Creation," *Minerals*, 12, 501, pp. 1-16, 2022.
22. Janiszewski, M., Pontow, S., Rinne, M., "Industry Survey on the Current State of Stope Design Methods in the Underground Mining Sector", *Energies*, 15, 240, pp. 2-20, 2022.
23. Nikbin, V., Jalali, S.E. and Mirzaei, H., "A comprehensive algorithm for economic optimization of underground Mining limits." *Journal of Mineral Resources Engineering*, 2(1), pp.1-17, 2017.



مقاله پژوهشی

بهینه‌سازی محدوده کارگاه‌های استخراج معادن زیرزمینی با مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح

سه‌بعدی

وحید نیک‌بین<sup>۱\*</sup>، مجید عطایی‌پور<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، گروه معدن، دانشکده مهندسی، دانشگاه زنجان؛ nikbin@znu.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی معدن، دانشگاه صنعتی امیرکبیر؛ map60@aut.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۱۲ - پذیرش: ۱۴۰۴/۰۱/۱۷

چکیده

با وجود اهمیت استخراج زیرزمینی در زنجیره تامین مواد معدنی، مسایل مهم طراحی این حوزه مانند طراحی کارگاه‌های استخراج، جانمایی بازکننده‌ها و برنامه‌ریزی تولید هنوز به شکل موثری حل نشده است و روش‌های موجود برای حل این مسایل، فرضیات و ساده‌سازی‌های فراوانی دارد. با هدف پر کردن بخشی از خلا موجود، یک مدل ریاضی برنامه‌ریزی عدد صحیح جدید برای طراحی بهینه کارگاه‌های استخراج زیرزمینی معرفی می‌شود. مدل ریاضی ارائه شده در جستجوی تعیین محدوده‌ای با ابعاد مجاز و با بیشترین ارزش اقتصادی ممکن است. از مهم‌ترین ویژگی‌های شاخص مدل پیشنهادی جدید می‌توان به تضمین ارائه جواب بهینه، تسریع زمان حل مساله، امکان اجرا بر روی مسایل بزرگ مقیاس و در نظر گرفتن قيود شاخصی مانند حداقل و حداکثر ابعاد کارگاه‌های استخراج داده‌های و همچنین حداقل ضخامت لنگه‌های جانبی اشاره کرد. اعتبارسنجی‌های انجام شده بر روی یک مثال فرضی و همچنین یک معدن سرب و روی کاملاً موفقیت‌آمیز بوده است. با اجرای مدل پیشنهادی جدید بر روی کانسار سرب و روی یاد شده محدوده‌ای شامل شش کارگاه استخراج به ارزش حدود ۸۲ میلیون دلار در مدت زمان ۵۹۲ ثانیه تعیین شده است.

کلمات کلیدی:

بهینه‌سازی، محدوده، کارگاه استخراج، مدل ریاضی، عدد صحیح

## ۱- مقدمه

افزایش نگرانی‌های زیست‌محیطی به دلیل حجم بالای تولید باطله، افزایش نسبت باطله‌برداری و هزینه‌های حمل و نقل با افزایش عمق معدن به همراه کاهش عمده ذخایر سطحی؛ روند تولید مواد معدنی با روش‌های استخراج سطحی را به مخاطره انداخته است. از این‌رو، پیش‌بینی می‌شود در سال‌های آتی استخراج زیرزمینی با جایگزین شدن به جای روش‌های استخراج سطحی سهم بیشتری از تولید مواد معدنی را به خود اختصاص دهد [۱].

با وجود معدن زیرزمینی فراوان که در سرتاسر جهان در حال فعالیت‌اند و پیش‌بینی‌ها نیز حاکی از افزایش تعداد این معدن در سال‌های پیش‌رو است، به دلایلی مانند پیچیدگی مدل‌سازی کانسار، تنوع روش‌های استخراج زیرزمینی و همچنین عدم قطعیت‌های فراوانی که در این حوزه وجود دارد؛ مسایل طراحی این معدن تاکنون به شکل موثری حل نشده است. طراحی شبکه بازکننده معدن، طراحی کارگاه‌های استخراج و تعیین توالی استخراج بلوک‌ها که به برنامه‌ریزی تولید معروف است، سه مساله مهم در طراحی معدن زیرزمینی‌اند که هیچ روش کامل و جامعی تاکنون برای حل این مسایل گزارش نشده است.

حدود پنج دهه از ارایه اولین الگوریتم بهینه‌سازی محدوده کارگاه‌های استخراج زیرزمینی توسط ریدل<sup>۱</sup> می‌گذرد. الگوریتم ریدل، دارای منطق برنامه‌ریزی پویا است و صرفاً برای روش استخراج تخریب بلوکی ارایه شده است [۲]. دو بعدی بودن، عدم تضمین جواب بهینه و محدود شدن به یک روش استخراج خاص؛ مهم‌ترین ایرادات الگوریتم برنامه‌ریزی پویای تقریبی ریدل است [۳]. اولین مدل ریاضی برای حل این مساله توسط آوانیک و یانگ<sup>۲</sup> با هدف تعیین نقطه شروع و پایان محدوده کارگاه‌های استخراج در یک ردیف از مدل بلوکی ارایه شده است. با وجود توانایی مدل ریاضی یاد شده در تولید جواب بهینه، به دلیل تک‌بعدی بودن، امکان اجرای آن بر روی مسایل دوبعدی و سه‌بعدی مهیا نیست [۴]. الگوریتم کارگاه شناور<sup>۳</sup> با الهام گرفتن از الگوریتم مخروط شناور<sup>۴</sup> (متحرک) که در تعیین محدوده نهایی معدن روباز استفاده می‌شود، با هدف تعیین محدوده بهینه

کارگاه‌های استخراج در معدن زیرزمینی ارایه شده است. جواب تولید شده در الگوریتم کارگاه شناور به قضاوت مهندسی و تجربه طراح وابسته است و تضمینی برای بهینه بودن جواب در این الگوریتم وجود ندارد [۵]. الگوریتم با ارزش‌ترین همسایگی<sup>۵</sup> از مزایایی مانند منطق ساده، سرعت محاسبات بالا و سادگی پیاده‌سازی در تمامی زبان‌های برنامه‌نویسی برخوردار است ولی به دلیل منطق جستجو محور آن، همانند الگوریتم کارگاه شناور، توانایی تولید جواب بهینه را ندارد [۶]. الگوریتم بهینه‌سازی محدوده کارگاه‌های محتمل یکپارچه که به اختصار آلپیس<sup>۶</sup> نامیده می‌شود توسط جلالی و همکاران برای بهینه‌سازی محدوده استخراج در کانسارهای رگه‌ای ارایه شده است. آلپیس دارای منطق برنامه‌ریزی پویا است و از آنجا که بر روی مدل اقتصادی بلوکی خاصی اجرا می‌شود، بعضی از محدودیت‌های ابعادی کارگاه استخراج را برطرف می‌کند. آلپیس الگوریتمی دوبعدی است و امکان استفاده از آن بر روی مدل‌های سه‌بعدی وجود ندارد و در نهایت دامنه کاربرد آن‌ها به کانسارهای رگه‌ای محدود شده است [۷]. جلالی و عطایی پور با معرفی الگوریتمی به نام گوما، سعی در تکمیل الگوریتم آلپیس داشته‌اند. در الگوریتم گوما<sup>۷</sup> مساله جانمایی بهینه طبقات همزمان با موضوع تعیین محدوده بهینه استخراج در هر طبقه در نظر گرفته می‌شود. الگوریتم آلپیس یک الگوریتم جزگرا است و برای بهینه‌سازی اقتصادی محدوده استخراج در یک پهنه یا طبقه تدوین شده است. بنابراین برای عمومیت بخشیدن به موضوع بهینه‌سازی محدوده استخراج زیرزمینی، الگوریتم گوما ارایه شده است که با این الگوریتم امکان تعیین تعداد، ارتفاع و جانمایی طبقات وجود دارد. الگوریتم فراگیر گوما بر روی یک مدل بلوکی خاص به نام مدل اقتصادی با ارزش متغیر اجرا می‌شود ولی از آنجا که در دسته الگوریتم‌های شمارش کامل قرار می‌گیرد دارای پیچیدگی محاسباتی بالایی است [۸]. جلالی و حسینی مدل بلوکی دوبعدی ماده معدنی را با استفاده از یک گراف شبیه‌سازی کردند و سپس از الگوریتم حریصانه دیکسترا برای پیدا کردن مسیر با بیشترین وزن بر روی گراف یاد شده استفاده شده است. مسیر تعیین شده با الگوریتم دیکسترا معرف محدوده بهینه کارگاه‌های استخراج زیرزمینی در مقاطع دوبعدی است [۹]. الگوریتمی با منطق حریصانه توسط توپال و سنز<sup>۸</sup> با هدف تعیین

<sup>5</sup> - Maximum Value Neighborhood

<sup>6</sup> - OLIPS

<sup>7</sup> - GOUMA

<sup>8</sup> - Topal and Sens

<sup>1</sup> - Riddle

<sup>2</sup> - Ovanic and Young

<sup>3</sup> - Floating Stope

<sup>4</sup> - Moving Cone

توسط نیک‌بین و عطایی‌پور پیشنهاد شده است. تولید جواب بهینه در این روش تضمین می‌شود، هر چند دامنه کاربرد آن صرفاً به نوع خاصی از کانسارها محدود شده است [۱۸]. الگوریتم الگوی جستجو توسط نیک‌بین و همکاران با هدف کاهش زمان انجام محاسبات رایانه‌ای مدل‌های ریاضی سابق ارائه شده است. تولید جواب بهینه یا بسیار نزدیک به جواب بهینه در یک زمان بسیار کوتاه از مهم‌ترین ویژگی‌های الگوریتم الگوی جستجو است. با وجود مزایای نامبرده، این روش نیز در دسته الگوریتم‌های جستجو محور قرار گرفته و تضمینی برای تولید جواب بهینه ارائه نمی‌کند [۱۹]. فورتادو<sup>۴</sup> و همکاران با ارائه یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح تصادفی، عدم قطعیت ناشی از عیار و هزینه‌های بازکننده‌های معدن را در طراحی کارگاه‌های استخراج در نظر گرفته‌اند. به دلیل تعداد زیاد متغیرهای تصمیم، این مدل از زمان اجرای محاسبات بسیار بالایی برخوردار است که کاربرد آن را در اجرای مسایل بزرگ مقیاس با مشکل روبرو می‌کند [۲۰]. ساری و کومرال<sup>۵</sup> مناطق پرعیار را شناسایی کردند و با استفاده از روش خوشه‌بندی سعی در جانمایی کارگاه‌های استخراج در طبقات مختلف از روش استخراج از طبقات فرعی داشته‌اند. حل مساله با این روش به کاهش موثر زمان حل مساله منجر می‌شود ولی جواب آن غیربهینه است [۲۱]. ستوده و همکاران برای تسهیل تعیین محدوده بهینه کارگاه‌های استخراج زیرزمینی یک برنامه رایانه‌ای با رابط کاربری مناسب در محیط زبان برنامه‌نویسی #C توسعه داده‌اند. این برنامه رایانه‌ای از الگوریتم سانداپاک برای تعیین محدوده کارگاه‌های استخراج استفاده می‌کند [۲۲]. یک الگوریتم جستجومحور برای تعیین محدوده کارگاه‌های استخراج در روش استخراج از طبقات فرعی توسط مورالس<sup>۶</sup> و همکاران ارائه شده است. در این روش با حذف کارگاه‌های استخراجی که از لحاظ ژئوتکنیکی پایدار نیستند، تعداد متغیرهای مساله کاهش یافته که در تسریع زمان حل موثر است ولی به دلیل ماهیت جستجومحور آن تضمینی برای تولید جواب بهینه وجود ندارد [۲۳]. نهلکو و موسینگوینی<sup>۷</sup> با ترکیب دو الگوریتم فراابتکاری ازدحام ذرات<sup>۸</sup> و ژنتیک<sup>۹</sup> سعی در کاهش زمان حل مساله داشته‌اند. مقایسه این روش با نتایج حاصل از نرم افزار دیتامین<sup>۱۰</sup> بهبود چند درصدی در جواب را نشان داده

کارگاه‌های استخراج منظم و مکعب- شکل معرفی شده است که از تمامی ویژگی‌های الگوریتم‌های حریصانه مانند سادگی، سرعت اجرای محاسبات بالا و امکان برنامه‌نویسی آسان بهره می‌برد، هر چند در اغلب موارد از رسیدن به جواب بهینه ناتوان است [۱۰]. روشی بر مبنای الگوریتم جریان شبکه برای تعیین محدوده بهینه کارگاه‌های استخراج در اطراف یک دوپل در روش استخراج از طبقات فرعی توسط بای<sup>۱</sup> و همکاران پیشنهاد شده است. روش یاد شده به جای مدل بلوکی‌های متداول و مرسوم که تمام بلوک‌ها متحدالشکل و یک اندازه‌اند از مدل بلوکی استوانه‌ای استفاده می‌کند [۱۱]. در یک مطالعه دیگر، بای و همکاران روش جریان شبکه را با یک الگوریتم جستجومحور ادغام کردند به نحوی که بتوانند از آن برای تعیین محدوده بهینه کارگاه‌های استخراج در اطراف چند دوپل استفاده کنند. دامنه کاربرد محدود و عدم کارایی در تولید جواب بهینه از مهم‌ترین معایب روش جریان شبکه است [۱۲]. برای طراحی کارگاه‌های استخراجی که از لحاظ ژئومکانیکی پایدار باشند، نلیس<sup>۲</sup> و همکاران با ارائه یک مدل ریاضی سعی بر غلبه بر این مشکل داشته‌اند [۱۳]. الگوریتم ارائه شده توسط سانداپاک و همکاران توانایی تولید جواب‌های بهتری نسبت به سایر الگوریتم‌های جستجو محور مشابه دارد ولی همانند سایر الگوریتم‌های جستجومحور موجود، این الگوریتم نیز در ارائه تضمین برای بهینه بودن جواب عاجز است [۱۴]. هوی<sup>۳</sup> و همکاران مساله بهینه‌سازی همزمان محدوده کارگاه‌های استخراج زیرزمینی و جانمایی بازکننده‌ها را بررسی کردند، با این حال از میان انواع مختلف بازکننده‌های اصلی معدن فقط چاه در نظر گرفته شده است [۱۵]. الگوریتمی حریصانه که از منطق برنامه‌ریزی پویا بهره می‌برد برای تعیین محدوده بهینه کارگاه‌های استخراج زیرزمینی در روش استخراج از طبقات فرعی توسط ساری و کومرال پیشنهاد شده است [۱۶].

فروغی و همکاران یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح چند هدفه برای بهینه‌سازی همزمان محدوده کارگاه‌های استخراج و برنامه‌ریزی تولید معادن زیرزمینی در روش استخراج از طبقات فرعی ارائه داده‌اند که با استفاده از الگوریتم ژنتیک حل می‌شود [۱۷]. یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح دودویی برای تعیین محدوده بهینه کارگاه‌های استخراج در کانسارهای رگه‌ای پرشیب

6 - Morales

7 - Nhleko and Musingwini

8 - Particle Swarm Optimization

9 - Genetic

10 - Data mine Software

1 - Bai

2 - Nelis

3 - Hou

4 - Furtado

5 - Sari and Kumral

تا توده‌ای (سه‌بعدی) را شامل می‌شود و در قیاس با سایر موجود از چندین مزیت عمده دارد.

تضمین تولید جواب بهینه به دلیل ماهیت ریاضی مدل‌ها، امکان اجرا بر روی مسایل سه‌بعدی، تسریع فرآیند حل مساله، لحاظ کردن بعضی از قیود مهم و روش‌های قابلیت کاربرد در تمامی روش‌های استخراج معادن زیرزمینی از جمله مهم‌ترین شاخصه‌های مدل پیشنهادی ارائه شده در این مقاله‌اند. به دلیل ساختار خاصی که مدل ریاضی ارائه شده دارد با استفاده از الگوریتم‌هایی مانند تجزیه بندرز یا آزادسازی قیود زمان حصول به جواب مساله به میزان قابل توجهی قابلیت کاهش یافتن دارد. با هدف تولید جواب‌های قابل اجرا در مقیاس عملیاتی، به غیر از قید حداقل ابعاد کارگاه‌های استخراج دو قید حداکثر ابعاد کارگاه‌های استخراج و حداقل ضخامت لنگه‌های جانبی نیز در طراحی کارگاه‌های استخراج در نظر گرفته شده است.

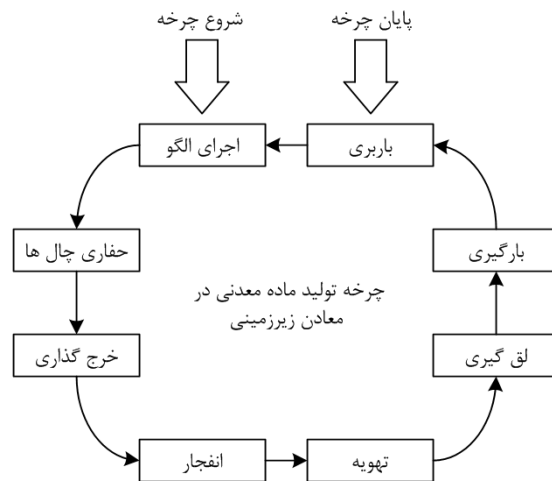
## ۲- تعریف مساله

پیاده‌سازی الگوی حفاری، حفاری چال‌ها، خرج‌گذاری، انفجار، تهویه (با هدف کاهش گرد و غبار ناشی از انفجار)، لقی‌گیری، بارگیری و باربری؛ مراحل اصلی در یک چرخه از تولید مواد معدنی با عملیات استخراج زیرزمینی را شامل می‌شوند (شکل ۱). با توجه به نوع عملیات، درجه مکانیزاسیون و روش استخراج مورد استفاده؛ همواره تعداد متفاوتی از نفرات و ماشین‌آلات دارای ظرفیت مختلف درون کارگاه‌های استخراج حضور دارند. بنابراین واضح است برای سهولت در روند فعالیت کارگران و مانور ایمن ماشین‌آلات، ضروری است کارگاه‌های استخراج زیرزمینی طراحی شده توسط طراحان معدن دارای یک حداقل ابعاد مشخص باشند (شکل ۲). بنابراین تعیین محل کارگاه‌های استخراج که از یک حداقل ابعاد در سه جهت اصلی برخوردار باشند با تضمین دستیابی به بیشترین سود اقتصادی ممکن هدف اصلی در تعیین محدوده کارگاه‌های استخراج زیرزمینی است.

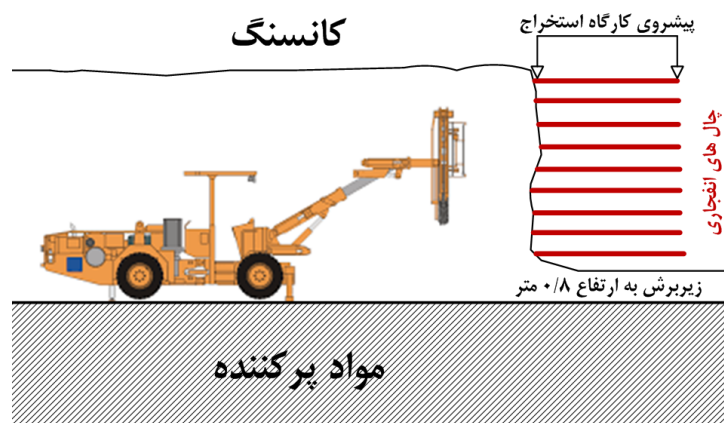
است هرچند روش یاد شده نیز از رسیدن به جواب بهینه ناتوان است [۲۴]. شامی قلندری و همکاران با در نظر گرفتن عدم قطعیت عباری، از الگوریتم کارگاه شناور برای تعیین محدوده بهینه کارگاه‌های استخراج در روش تخریب بلوکی استفاده کردند [۲۵]. در مطالعه‌ای که توسط اسماعیلی و همکاران انجام شده است، حداکثر ابعاد کارگاه‌های استخراج با استفاده از سیستم طبقه‌بندی توده سنگ تعیین شده است، سپس از الگوریتم جریان شبکه برای تعیین محدوده بهینه کارگاه‌های استخراج زیرزمینی در یک کانسار مس که با روش استخراج از طبقات فرعی فعالیت می‌کند، استفاده شده است [۲۶]. یک مقاله مروری در زمینه طراحی بهینه کارگاه‌های استخراج زیرزمینی در سال ۲۰۲۲ به چاپ رسیده است که به مرور ویژگی‌ها، دامنه کاربرد، نقاط قوت و ضعف روش‌های موجود می‌پردازد [۲۷]. آخرین مقاله مروری در زمینه روش‌های تعیین محدوده بهینه کارگاه‌های استخراج زیرزمینی توسط موتاندوا و موسینگوینی انجام شده است. موضوعات، مفاهیم، گرایش‌ها، اطلاعات مکانی نویسندگان مقالات پیشین و سایر اطلاعات کتابشناختی در زمینه روش‌ها و الگوریتم‌های موجود در این مقاله به صورت جامع و کامل مورد نقد و بررسی قرار گرفته است [۲۸].

تمام روش‌های موجود برای بهینه‌سازی محدوده کارگاه‌های استخراج زیرزمینی از یک یا چند مورد از ایرادات کلی زیر رنج می‌برند که در مدل ریاضی پیشنهادی جدید سعی شده است تا حد امکان بر این ایرادات غلبه شود.

- فرضیات و ساده‌سازی‌های فراوان
- عدم ارائه تضمین برای تولید جواب بهینه
- حصول به جواب در یک زمان طولانی
- عاجز ماندن در حل مسایل بزرگ مقیاس
- عدم لحاظ کردن بعضی از قیود مهم و اساسی
- با هدف پر کردن بخشی از خلا کارگاه‌های موجود در طراحی معادن زیرزمینی، در این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح جدید برای تعیین محدوده بهینه استخراج زیرزمینی ارائه می‌شود. دامنه کاربرد این مدل، از کانسارهای رگه‌ای (دو‌بعدی)



شکل ۱- چرخه عملیات تولید معادن زیرزمینی [۲۹]



شکل ۲- چالزنی جامبو در روش استخراج کند و آکند

### ۳- مدل‌سازی ریاضی

پیش از تشریح مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح پیشنهادی، فهرستی از علائم و نشانه‌های به کار رفته در طراحی روابط و مدل یاد شده به اختصار در جدول ۱ تعریف شده است.

مبنای تصمیم‌گیری در تمامی روش‌های بهینه‌سازی موجود برای حل مساله بهینه‌سازی محدوده کارگاه‌های استخراج زیرزمینی، انتخاب یا عدم انتخاب یک بلوک به عنوان جزیی از محدوده بهینه است. در مدل‌های ریاضی که تاکنون برای حل این مساله گزارش شده است، از متغیرهای تصمیم دودویی برای شناسایی بلوک‌های استخراج‌پذیر استفاده می‌شود. برخلاف رویه مدل‌های سابق، مبنای تصمیم‌گیری در مدل پیشنهادی ارایه شده در این مقاله، انتخاب یا عدم انتخاب مجموعه‌ای از بلوک‌ها است که چیدمان آن‌ها در کنار یکدیگر معرف یک کارگاه استخراج با حداقل ابعاد است. مدل ریاضی پیشنهادی در این

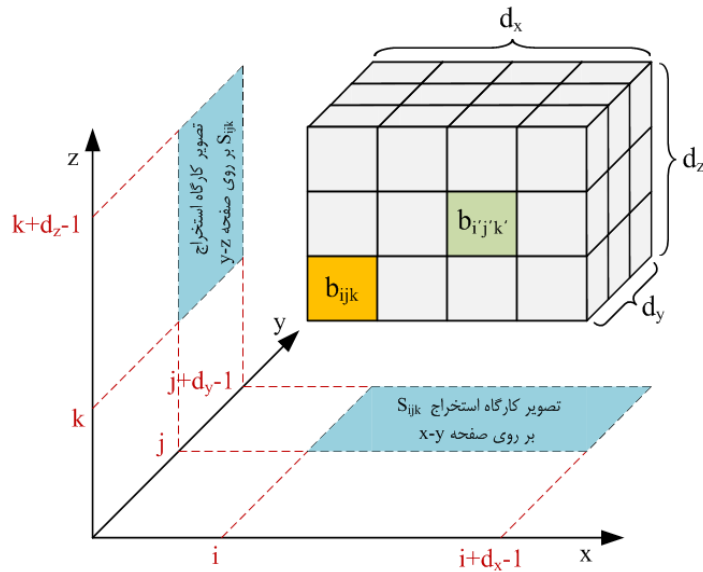
مقاله علاوه بر تضمین جواب بهینه، زمان تولید جواب را نیز به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد و به دلیل ساختار خاص آن انتظار می‌رود بتوان با استفاده از روابط معتبر یا به کارگیری الگوریتم‌هایی چون تجزیه بندرز و یا آزادسازی قیود، نسبت به کاهش زمان حل مساله اقدامات موثرتری فراهم آورد. مبنای تصمیم‌گیری در مدل‌های ریاضی جدید، کارگاه‌هایی با حداقل ابعاد است که شکل این کارگاه‌ها در فضای دوبعدی به صورت یک مستطیل و در فضای سه‌بعدی به صورت یک مکعب مستطیل است (شکل ۳). بنابراین هر مجموعه‌ای از بلوک‌های استخراجی که چیدمان آن‌ها در کنار یکدیگر، تشکیل‌دهنده یک کارگاه استخراج با حداقل ابعاد باشد، می‌تواند به عنوان یک جواب موجه برای مساله باشد. کارگاه‌های استخراج با بلوک مینا یا بلوک مرجع خود معرفی می‌شوند. بلوک مبنای یک کارگاه استخراج یکی از بلوک‌های واقع در مجموعه بلوک‌های مرتبط با آن کارگاه

با استفاده از رابطه ۱ به آسانی مشخص می‌شوند. متغیر تصمیم اصلی در مدل پیشنهادی از نوع دودویی است که با  $\gamma_{ijk}$  نشان داده می‌شود. در صورتی که این متغیر مقدار یک اخذ کند به معنای آن است که کارگاه استخراج  $S_{ijk}$  بخشی از محدوده استخراج و جواب مساله است، در غیر این صورت این کارگاه هیچ نقشی در جواب مساله ندارد.

استخراج است که اندیس آن در هر سه جهت مختصاتی از سایر بلوک‌ها کمتر باشد (بلوک نارنجی رنگ در شکل ۳). کارگاه‌های استخراج با بلوک‌های مبنای خود معرفی می‌شوند. به عنوان مثال کارگاه استخراج  $S_{ijk}$ ، کارگاهی است که بلوک مبنای آن  $b_{ijk}$  است. از آنجا که حداقل ابعاد تمامی کارگاه‌های استخراج در سه جهت اصلی  $x$ ،  $y$  و  $z$  به ترتیب برابر با  $d_x$ ،  $d_y$  و  $d_z$  بیان می‌شود، بنابراین سایر بلوک‌های مرتبط با کارگاه استخراج  $S_{ijk}$

جدول ۱- فهرست علائم مورد استفاده در طراحی مدل‌های ریاضی جدید

علامت	نوع	تعریف
$i, i'$	اندیس	اندیس‌های بلوک در جهت محور $x$
$j, j'$	اندیس	اندیس‌های بلوک در جهت محور $y$
$k, k'$	اندیس	اندیس‌های بلوک در جهت محور $z$
$b_{ijk}$	پارامتر	بلوک واقع در موقعیت $(i, j, k)$
$p_{ijk}$	پارامتر	ارزش اقتصادی بلوک $b_{ijk}$
$d_x$	پارامتر	حداقل طول کارگاه استخراج در جهت محور $x$
$d_y$	پارامتر	حداقل طول کارگاه استخراج در جهت محور $y$
$d_z$	پارامتر	حداقل طول کارگاه استخراج در جهت محور $z$
$D_x$	پارامتر	حداکثر طول کارگاه استخراج در جهت محور $x$
$D_y$	پارامتر	حداکثر طول کارگاه استخراج در جهت محور $y$
$D_z$	پارامتر	حداکثر طول کارگاه استخراج در جهت محور $z$
$R_x$	پارامتر	حداقل ضخامت لنگه‌های جانبی در جهت محور $x$
$R_y$	پارامتر	حداقل ضخامت لنگه‌های جانبی در جهت محور $y$
$R_z$	پارامتر	حداقل ضخامت لنگه‌های جانبی در جهت محور $z$
$M$	پارامتر	یک عدد مثبت بزرگ
$S_{ijk}$	مجموعه	کارگاه استخراج دارای حداقل ابعاد و بلوک مبنای $b_{ijk}$
$\Delta$	مجموعه	مجموعه بلوک‌های مبنا (مرجع)
$\Gamma$	مجموعه	مجموعه بلوک‌هایی که در محدوده تاثیر بیش از یک کارگاه استخراج قرار دارند.
$v_{ijk}$	پارامتر	ارزش اقتصادی کارگاه استخراج $S_{ijk}$
$\gamma_{ijk}$	متغیر تصمیم	متغیر تصمیم دودویی برای نشان دادن انتخاب یا عدم انتخاب کارگاه استخراج $S_{ijk}$
$x_{ijk}$	متغیر تصمیم	متغیر تصمیم دودویی برای تعیین همپوشانی دو یا چند کارگاه استخراج در موقعیت $(i, j, k)$
$\alpha_{ijk}$	متغیر تصمیم	متغیر تصمیم گسسته برای شناسایی تعداد مازاد شمارش ارزش بلوک $b_{ijk}$ در تابع هدف
$U$	پارامتر	حد بالای متغیر $\alpha_{ijk}$



شکل ۳- کارگاه استخراج  $S_{ijk}$  با حداقل ابعاد

$$S_{ijk} = \{b_{ij'k'} : \forall i' \in \{i, \dots, i+d_x-1\}, j' \in \{j, \dots, j+d_y-1\}, k' \in \{k, \dots, k+d_z-1\}\} \quad (1)$$

### ۳-۱- روش کاهش متغیر

ناچیز یا حتی صفر است. در واقع با هدف کاهش متغیرهای دودویی مرتبط با بلوک‌های مینا، شناسایی بلوک‌های مینایی مطرح است که شانس ناچیزی برای انتخاب مجدد دارند. بدین منظور ابتدا در جواب الگوریتم‌های جستجومحور موجود چنین بلوک‌هایی شناسایی شده و سپس از مساله کنار گذاشته می‌شوند.

بدین منظور، پیش از اجرای مدل پیشنهادی، با اجرای الگوریتم کارگاه شناور و تعیین پوش خارجی این الگوریتم، بلوک‌های مینای آن تعیین می‌شوند. اگر مجموعه بلوک‌های مینای مدل پیشنهادی با  $\Delta$  نشان داده شود، این مجموعه برابر با مجموعه تمام بلوک‌های مینای الگوریتم کارگاه شناور است. با استفاده از چنین رویکردی، صرفاً کارگاه‌های استخراجی بررسی می‌شوند که شانس بالایی برای قرار گرفتن در جواب نهایی مساله دارند. در نتیجه این کاهش متغیر، انتظار می‌رود زمان حل مساله به نحو موثری کاهش یابد.

$$\Delta = R_{FS} \quad (2)$$

که در آن:

$R_{FS}$  مجموعه بلوک‌های مینای در پوش خارجی الگوریتم کارگاه شناور<sup>۱</sup>

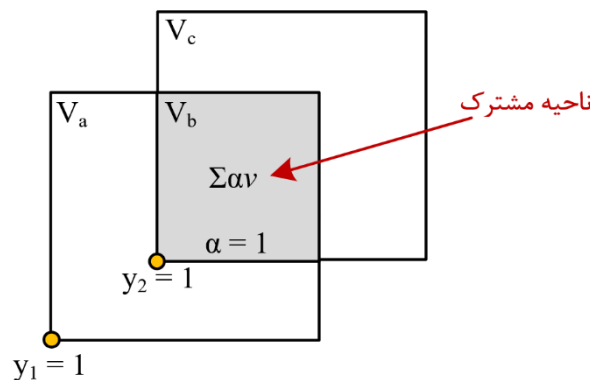
در برخی مواقع می‌توان پیش از حل مساله، مقادیر بعضی از متغیرهای تصمیم را حدس زد و سپس آن‌ها را از مساله کنار گذاشت. چنین روشی "کاهش متغیر" نام دارد و در اغلب موارد با سبک‌سازی مدل، نسبت به کاهش زمان حل مساله موفق عمل می‌کند. بنابراین حذف آن دسته از متغیرهای تصمیم که با قطعیت کامل یا با درصد احتمال بالا بتوان مقادیر آن‌ها را از پیش تعیین کرد، روند دستیابی به جواب را تسریع می‌بخشد. در فرآیند مدل‌سازی ارائه شده در این مقاله، برای بلوک‌های مینای متناظر با هر کارگاه استخراج یک متغیر تصمیم دودویی تعریف می‌شود. بنابراین کاهش تعداد بلوک‌های مینا به معنای کاهش تعداد متغیرهای تصمیم است. از بین مجموعه تمام بلوک‌های مینای موجود در مساله، بلوک‌هایی که با یکی از الگوریتم‌های جستجو محور موجود به عنوان جواب انتخاب شده‌اند، شانس مجدد برای قرار گرفتن در جواب نهایی مدل جدید را نیز دارند. برعکس این قضیه نیز صادق است، یعنی اگر بلوکی در جواب یک الگوریتم جستجومحور وجود نداشته باشد، این احتمال (هر چند اندک) وجود دارد، در جواب یک روش دیگر نیز وجود نداشته باشد. واضح است اگر بلوکی در جواب تعداد بیشتری الگوریتم جستجومحور وجود نداشته باشد، شانس انتخاب آن با روش دیگر

<sup>۱</sup> - Floating Stope

## ۲-۳- مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح

مدل ریاضی پیشنهادی (روابط ۵ تا ۱۶) از متغیرهای تصمیم دودویی (مانند  $y_{ijk}$ ) برای انتخاب یا عدم انتخاب کارگاه‌های استخراج (مانند  $S_{ijk}$ ) استفاده می‌کند. کارگاه‌های استخراج مکعب‌های مستطیل دارای ابعاد ثابت و مشخص‌اند. این امکان محتمل است که با همپوشانی دو یا چند کارگاه استخراج، ارزش تعدادی از بلوک‌ها بیش از یک بار در مقدار تابع هدف محاسبه شود. بنابراین ضرورت دارد ابتدا نواحی مشترک شناسایی و سپس ارزش بلوک‌های واقع در این نواحی از تابع هدف کسر شود. اگر یک بلوک در ناحیه مشترک مربوط به دو یا چند کارگاه استخراج قرار بگیرد آنگاه مقدار متغیر تصمیم  $x_{ijk}$  یک است. متغیر تصمیم  $\alpha_{ijk}$  برای تعیین تعداد مازاد شمارش ارزش بلوک  $b_{ijk}$  به کار می‌رود. به عنوان مثال مطابق شکل ۴، ناحیه با رنگ خاکستری بین هر دو کارگاه استخراج یک و دو مشترک است و

تمام بلوک‌هایی که در این ناحیه قرار بگیرند به جای یک بار محاسبه ارزش در تابع هدف، دو بار محاسبه می‌شوند. در این صورت مقدار تابع هدف با مقدار واقعی محدوده متفاوت است و ممکن است به اتخاذ تصمیمات نادرست با مدل منجر شود. بنابراین در چنین حالتی با استفاده از متغیر  $\alpha$  بلوک‌های دارای شمارش مازاد شناسایی می‌شوند. چون ناحیه خاکستری رنگ صرفاً بین دو کارگاه استخراج مشترک است، ارزش بلوک‌های واقع در این ناحیه به جای یک بار، دو بار محاسبه می‌شود. در چنین شرایطی مدل برای تمام بلوک‌های واقع در این ناحیه مقدار  $\alpha$  را برابر با یک در نظر می‌گیرد و با کسر یک بار ارزش بلوک از تابع هدف، مقدار تابع هدف به مقدار واقعی آن تبدیل می‌شود. در واقع برای تمام بلوک‌های این ناحیه مشترک مقدار متغیر  $\alpha$  برابر با یک است و با کسر ارزش بلوک‌های این ناحیه ( $V_b$ ) از تابع هدف، ایراد همپوشانی برطرف می‌شود.



شکل ۴- همپوشانی دو کارگاه استخراج

$$\text{ارزش کارگاه اول} = V_a + V_b$$

$$\text{ارزش کارگاه دوم} = V_b + V_c$$

$$\text{ارزش ناحیه مشترک} = \sum \alpha v = V_b$$

$$\text{ارزش محدوده} = V_a + V_b + V_c = \text{ارزش کارگاه اول} + \text{ارزش کارگاه دوم} - \text{ارزش ناحیه مشترک}$$

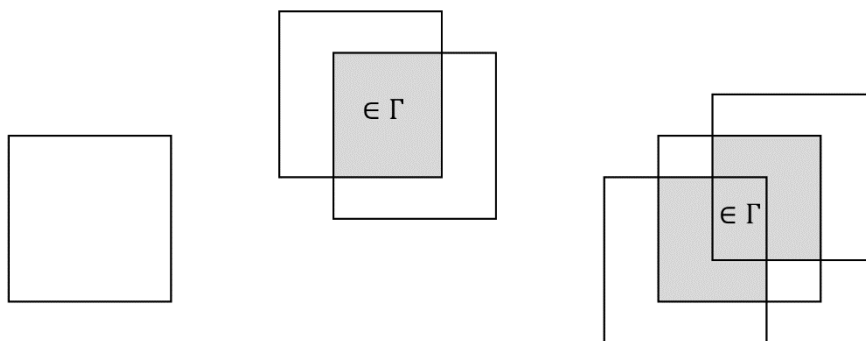
عبارت سمت چپ صفر باشد چون عبارت سمت راست نیز صفر است هر دو متغیر  $x_{ijk}$  و  $\alpha_{ijk}$  مقدار صفر اتخاذ می‌کنند. این بدین معناست که بلوک یاد شده در درون هیچ کارگاه استخراجی قرار نمی‌گیرد. اگر عبارت سمت راست قید ۶ برابر با یک باشد آنگاه با توجه به اینکه متغیر  $x_{ijk}$  از نوع دودویی است، صرفاً دو ترکیب  $(x_{ijk}, \alpha_{ijk}) = (0, 1)$  و  $(x_{ijk}, \alpha_{ijk}) = (1, 0)$  محتمل‌اند. ولی با توجه به قید ۷ اگر متغیر  $\alpha_{ijk}$  مقدار غیر صفر اتخاذ کند

مدل ریاضی برنامه‌ریزی عدد صحیح با روابط ۵ تا ۱۶ بیان می‌شود. تابع هدف این مدل، از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول تابع هدف، ارزش بلوک‌های واقع در یک کارگاه استخراج را در نظر می‌گیرد و در بخش دوم آن، بلوک‌هایی که بیش از یک‌بار ارزش آن‌ها محاسبه شده است از تابع هدف کسر می‌شود. عبارت سمت چپ قید ۶، معرف تعداد کارگاه‌های استخراجی است که بلوک  $b_{ijk}$  را پوشش داده‌اند. اگر مقدار

واضح است شمارش مازاد یک بلوک زمانی اتفاق می‌افتد که آن بلوک در محدوده بیش از یک کارگاه استخراج قرار گیرد. در ابتدا مجموعه تمام کارگاه‌های استخراجی که در برگرفته یک بلوک مانند  $b_{ijk}$  است، شناسایی شده و با  $C_{ijk}$  نشان داده می‌شود (رابطه ۳). در واقع  $C_{ijk}$  معرف مجموعه پوشای بلوک  $b_{ijk}$  است. اگر تعداد اعضای مجموعه  $C_{ijk}$  بیش از یک عضو باشد، به این معناست که بلوک  $b_{ijk}$  در محدوده بیش از یک کارگاه استخراج قرار دارد. در این صورت مختصات بلوک یاد شده در مجموعه گاما ( $\Gamma$ ) ذخیره می‌شود (رابطه ۴).

$$C_{ijk} = \{(i', j', k') \in \Delta \mid b_{ijk} \in S_{i'j'k'}\} \quad (3)$$

$$\Gamma = \{(i, j, k) \mid |C_{ijk}| > 1\} \quad (4)$$



شکل ۵- نمایش مجموعه گاما برای یک مثال فرضی شامل شش کارگاه استخراج

آنگاه متغیر  $x_{ijk}$  باید حتما مقدار یک داشته باشد. بنابراین تنها ترکیب مجاز و قابل قبول مقدار صفر برای متغیر  $\alpha_{ijk}$  و مقدار یک برای متغیر  $x_{ijk}$  است. این بدین معناست اگر بلوک  $b_{ijk}$  توسط یک کارگاه پوشش داده شود، چون متغیر  $\alpha_{ijk}$  مقدار صفر دارد، دارای هیچ شمارش مازادی نیست و در حالت آخر، اگر مقدار عبارت سمت چپ قید ۶ عددی بیشتر از یک (مانند  $N$ ) باشد، بدین معناست که بلوک  $b_{ijk}$  در درون  $N$  کارگاه استخراج قرار دارد و ارزش آن  $N-1$  بار بیشتر از حد لزوم محاسبه می‌شود. در چنین حالتی مجدداً فقط دو ترکیب  $(x_{ijk}, \alpha_{ijk}) = (0, N)$  و  $(x_{ijk}, \alpha_{ijk}) = (1, N-1)$  محتمل است. قید ۷ اجازه انتخاب ترکیب اول را نمی‌دهد بنابراین تنها ترکیب قابل قبول اخذ مقدار  $N-1$  برای متغیر  $\alpha_{ijk}$  و مقدار یک برای متغیر  $x_{ijk}$  است. در این حالت چون مقدار متغیر  $\alpha_{ijk}$  برابر با  $N-1$  است، تمام شمارش‌های مازاد ارزش بلوک  $b_{ijk}$  توسط بخش دوم تابع هدف کسر می‌شود.

طول کارگاه استخراج در دو جهت  $\gamma$  و  $z$  طراحی شده‌اند. همچنین در قید ۱۱ که برای لحاظ کردن محدودیت حداقل ضخامت پایه‌های جانبی در جهت محور  $x$  طراحی شده است، اگر یک بلوک در گوشه یک پایه قرار بگیرد آنگاه لازم است تعداد  $R_x - 1$  بلوک مجاور آن نیز در درون پایه قرار بگیرند تا محدودیت حداقل ابعاد پایه‌ها در جهت  $x$  همواره برقرار باشد. قیود ۱۲ و ۱۳ نیز با ساختاری مشابه برای برقراری محدودیت حداقل ضخامت پایه‌های جانبی در دو جهت  $\gamma$  و  $z$  طراحی شده‌اند.

محدودیت حداکثر ابعاد کارگاه‌های استخراج در سه جهت  $x$ ،  $\gamma$  و  $z$  به ترتیب با روابط ۸ تا ۱۰ بیان می‌شود. در قید ۸ که برای محدود کردن طول کارگاه استخراج در جهت محور  $x$  ارایه شده است، وضعیت  $D_x + 1$  بلوک متوالی بررسی می‌شود. واضح است اگر تمام  $D_x + 1$  بلوک یاد شده انتخاب شوند، آنگاه طول کارگاه استخراج از حداکثر طول مجاز در جهت  $x$  یا همان  $D_x$  بزرگتر می‌شود. بنابراین برای جلوگیری از چنین تصمیمی با مدل مطابق قید ۹ برای تعداد  $D_x + 1$  بلوک متوالی، متغیرهای تصمیم متناظر با حداکثر  $D_x$  بلوک می‌توانند مقدار یک اتخاذ کنند. قیود ۹ و ۱۰ نیز با ساختاری مشابه برای برقراری محدودیت حداکثر

$$Z = \max \sum_{(i,j,k) \in \Delta} v_{ijk} \times y_{ijk} - \sum_{(i,j,k)} p_{ijk} \times \alpha_{ijk} \quad (5)$$

Subject to:

$$\sum_{(i',j',k') \in \Delta | b_{ijk} \in S_{i'j'k'}} y_{i'j'k'} = x_{ijk} + \alpha_{ijk} \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \quad (6)$$

$$d_x \times d_y \times d_z \times y_{ijk} \leq \sum_{(i',j',k') \in S_{ijk}} x_{i'j'k'} \quad \forall (i,j,k) \in \Delta \quad (7)$$

$$\sum_{i'=i}^{i+D_x} x_{i'jk} \leq D_x \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \quad (8)$$

$$\sum_{j'=j}^{j+D_y} x_{ij'k} \leq D_y \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \quad (9)$$

$$\sum_{k'=k}^{k+D_z} x_{ijk'} \leq D_z \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \quad (10)$$

$$(R_x - 1)(x_{(i-1)jk} - x_{ijk}) \leq \sum_{i'=i+1}^{i+R_x-1} 1 - x_{i'jk} \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \quad (11)$$

$$(R_y - 1)(x_{i(j-1)k} - x_{ijk}) \leq \sum_{j'=j+1}^{j+R_y-1} 1 - x_{ij'k} \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \quad (12)$$

$$(R_z - 1)(x_{ijk(k-1)} - x_{ijk}) \leq \sum_{k'=k+1}^{k+R_z-1} 1 - x_{ijk'} \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \quad (13)$$

$$y_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j,k) \in \Delta \quad (14)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \quad (15)$$

$$\alpha_{ijk} \in \{0,1, \dots, U\} \quad \forall (i,j,k) \in \Gamma \quad (16)$$

منطقی است.

#### ۴- اعتبارسنجی

##### ۴-۱- مثال فرضی

با هدف اثبات کارایی و عملکرد مدل ریاضی ارائه شده، از یک مدل بلوکی اقتصادی فرضی دوبعدی (شکل ۶) شامل پنج

اعتبارسنجی مدل‌های پیشنهادی با استفاده از یک مثال فرضی و داده‌های یک معدن سرب و روی انجام شده است و نتایج حاصل از اجرای مدل‌ها تضمین‌کننده جواب بهینه در یک زمان

که جواب تولید شده با مدل ریاضی پیشنهادی، مطابق شکل ۹، دارای ارزش ۶۳ واحد پولی است. با توجه به اینکه الگوریتم‌های با ارزش‌ترین همسایگی و حریمانه محدودیت‌های حداکثر ابعاد کارگاه استخراج و حداقل ضخامت لنگه‌ها را در نظر نمی‌گیرند، با هدف امکان مقایسه نتایج، قیود نامبرده برای مدل ریاضی جدید در حل مثال فرضی یاد شده غیرفعال شده است. به عبارت دیگر مدل ریاضی جدید در حل این مثال فرضی فقط قید حداقل ابعاد کارگاه استخراج را لحاظ کرده است.

ردیف و هفت ستون برای اعتبارسنجی اولیه استفاده شده است. در این مثال، حداقل ابعاد کارگاه‌های استخراج در دو جهت  $x$  و  $y$  به ترتیب برابر با سه و یک بلوک در نظر گرفته شده است. از آنجا که دو الگوریتم با ارزش‌ترین همسایگی و حریمانه در مقایسه با سایر الگوریتم‌های جستجو محور موجود معمولاً جواب‌هایی با ارزش بیشتر تولید می‌کند، از این دو الگوریتم به عنوان مبنای مقایسه نتایج استفاده شده است. جواب تولید شده با الگوریتم با ارزش‌ترین همسایگی (شکل ۷) و الگوریتم حریمانه (شکل ۸) به ترتیب برابر با ۵۸ و ۶۲ واحد پولی است. در صورتی

		X											
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱	۱	۲	۱	-۱	۰	۳	۲	-۲	۴	۱	۲	-۲	-۱
۲	۲	۵	-۱	-۱	۲	۳	-۲	۱	۰	۱	۳	-۱	-۱
۳	۳	۳	۰	۴	۱	-۲	-۱	۰	-۱	۲	۱	-۱	۲
۴	۴	-۱	۰	-۲	۱	۲	۰	۴	-۱	۱	۲	۲	-۱
۵	۵	۶	-۱	-۳	۱	۰	-۳	۵	۳	۱	-۴	۲	۰

شکل ۶- مدل بلوکی اقتصادی فرضی

		X											
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱	۱	۲	۱	-۱	۰	۳	۲	-۲	۴	۱	۲	-۲	-۱
۲	۲	۵	-۱	-۱	۲	۳	-۲	۱	۰	۱	۳	-۱	-۱
۳	۳	۳	۰	۴	۱	-۲	-۱	۰	-۱	۲	۱	-۱	۲
۴	۴	-۱	۰	-۲	۱	۲	۰	۴	-۱	۱	۲	۲	-۱
۵	۵	۶	-۱	-۳	۱	۰	-۳	۵	۳	۱	-۴	۲	۰

شکل ۷- محدوده تعیین شده با الگوریتم با ارزش‌ترین همسایگی، به ارزش ۵۸ واحد [۳۰]

		X											
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱	۱	۲	۱	-۱	۰	۳	۲	-۲	۴	۱	۲	-۲	-۱
۲	۲	۵	-۱	-۱	۲	۳	-۲	۱	۰	۱	۳	-۱	-۱
۳	۳	۳	۰	۴	۱	-۲	-۱	۰	-۱	۲	۱	-۱	۲
۴	۴	-۱	۰	-۲	۱	۲	۰	۴	-۱	۱	۲	۲	-۱
۵	۵	۶	-۱	-۳	۱	۰	-۳	۵	۳	۱	-۴	۲	۰

شکل ۸- محدوده تعیین شده با الگوریتم حریمانه، به ارزش ۶۲ واحد [۳]

		X											
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱	۱	۲	۱	-۱	۰	۳	۲	-۲	۴	۱	۲	-۲	-۱
۲	۲	۵	-۱	-۱	۲	۳	-۲	۱	۰	۱	۳	-۱	-۱
۳	۳	۳	۰	۴	۱	-۲	-۱	۰	-۱	۲	۱	-۱	۲
۴	۴	-۱	۰	-۲	۱	۲	۰	۴	-۱	۱	۲	۲	-۱
۵	۵	۶	-۱	-۳	۱	۰	-۳	۵	۳	۱	-۴	۲	۰

شکل ۹- محدوده تعیین شده با مدل ریاضی جدید پیشنهادی، به ارزش ۶۳ واحد

## ۴-۲- مطالعه موردی

نیک‌بین و همکاران تولید می‌کند. هر چند زمان دستیابی به جواب با کاربرد این روش به میزان محسوسی کاهش یافته است. بنابراین در حال حاضر مدل ریاضی ارایه شده در این مقاله، تنها روش بهینه‌سازی موجود است که امکان تولید جواب بهینه در سریع‌ترین زمان ممکن را داراست. ادعا می‌شود با به کار بردن روش‌هایی مانند اضافه کردن رابطه‌های معتبر به مدل ریاضی پایه، آزادسازی قیود یا استفاده از الگوریتم تجزیه بندرز احتمال کاهش زمان حل مساله به میزان چشم‌گیری میسر است. مشخصات سیستم رایانه‌ای مورد استفاده برای انجام محاسبات در جدول ۴ بیان شده است. با توجه به اینکه در سایر الگوریتم‌های موجود قیود حداقل ضخامت لنگه‌های جانبی و حداکثر ابعاد کارگاه‌های استخراج لحاظ نمی‌شود، با هدف اینکه تمام روش‌ها بر روی یک مساله واحد اجرا شوند و تمام آن‌ها از شرایط یکسانی برخوردار باشند، در اجرای مدل پیشنهادی ارایه شده در این مقاله بر روی مطالعه موردی یاد شده، صرفاً قیود حداقل ابعاد کارگاه استخراج در نظر گرفته شده است و سایر قیود غیرفعال شده است.

جدول ۲- داده‌های ورودی و مشخصات مدل بلوکی ذخیره سرب و روی

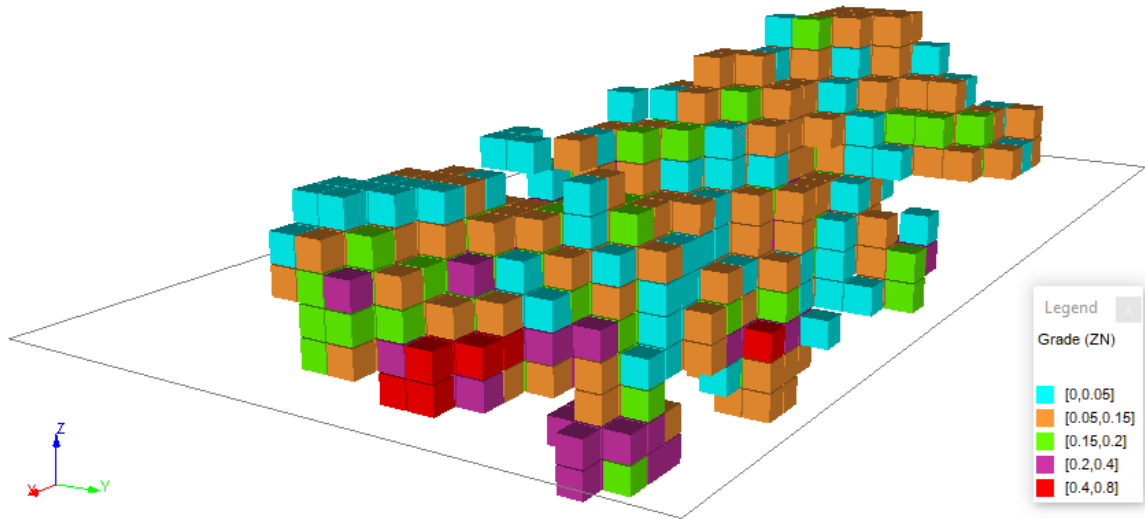
واحد	مقدار	پارامتر
-	۴۳۶۸	تعداد بلوک‌های مدل بلوکی
درصد	۰/۸۳	متوسط عیار سرب
درصد	۴/۸۴	متوسط عیار روی
متر	۱۰	ابعاد بلوک‌ها در جهت $x$
متر	۱۰	ابعاد بلوک‌ها در جهت $y$
متر	۱۰	ابعاد بلوک‌ها در جهت $z$
متر	۳۰	حداقل طول کارگاه‌های استخراج در هر سه جهت $x$ ، $y$ و $z$
متر	۵۰	حداکثر طول کارگاه‌های استخراج در هر سه جهت $x$ ، $y$ و $z$
متر	۲۰	حداقل ضخامت لنگه‌های جانبی در هر سه جهت $x$ ، $y$ و $z$

جدول ۳- نتایج تولید شده با الگوریتم‌های موجود و مدل ریاضی جدید پیشنهادی بر روی ذخیره سرب و روی

روش بهینه‌سازی	مقدار تابع هدف (دلار)	زمان حل (بر حسب ثانیه)	فاصله تا جواب بهینه (درصد)
کارگاه شناور [۵]	۱۱۴,۱۴۹,۰۶۱	۱	۱۲,۲۷
با ارزش‌ترین همسایگی [۶]	۱۲۴,۱۰۹,۷۳۲	۱	۴,۶۲
توپال و سنز [۱۰]	۱۰۲,۷۶۶,۸۶۳	۱	۲۱,۰۲
حریصانه [۳]	۱۲۸,۹۸۲,۰۷۸	۱	۰,۸۷
الگوی جستجو ۱ [۱۷]	۱۲۹,۶۱۷,۹۴۷	۲	۰,۳۸
الگوی جستجو ۲ [۱۷]	۱۳۰,۱۰۳,۱۵۲	۱۳۲	۰,۰۱
مدل ریاضی [۱۲]	۱۳۰,۱۱۹,۱۲۴	۲۲۷۴	۰
مدل ریاضی پیشنهادی	۱۳۰,۱۱۹,۱۲۴	۷۰۷	۰

جدول ۴- مشخصات سیستم رایانه‌ای مورد استفاده برای انجام محاسبات

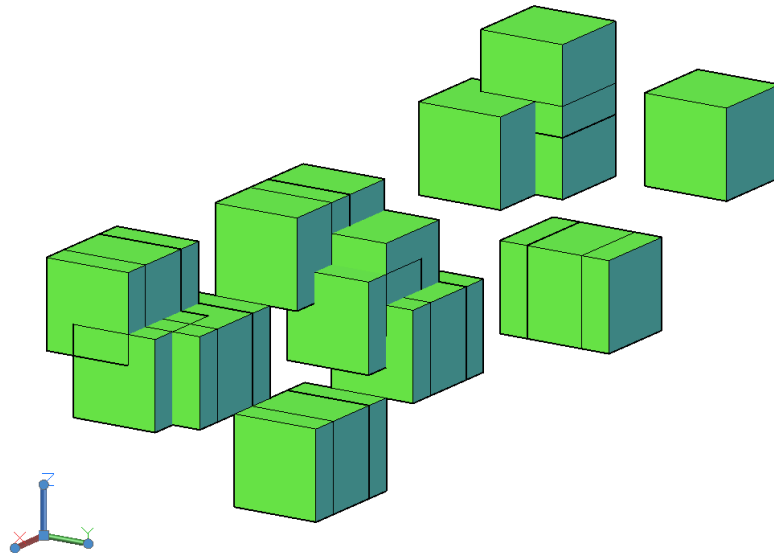
نوع سیستم	واحد پردازش مرکزی (CPU)	حافظه دسترسی تصادفی (RAM)
۶۴ بیتی	Core i5 @ 2.40 GHz	4.00 GB



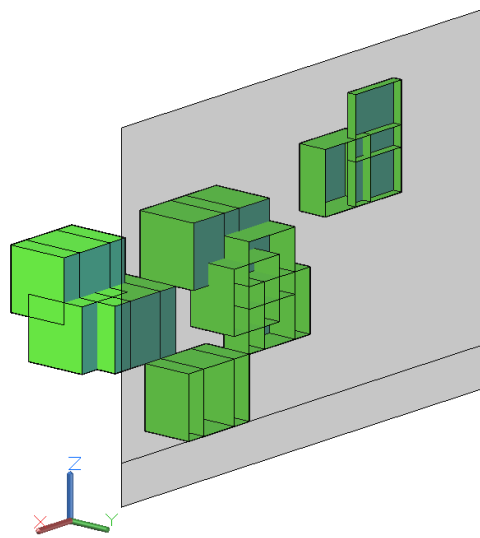
شکل ۱۰- مدل بلوکی عیاری ذخیره سرب و روی

پیدا کند. این محدوده در شکل ۱۱ نشان داده شده است. و همچنین برشی قائم از محدوده تعیین شده با مدل ریاضی جدید در شکل ۱۲ نشان داده شده است.

با در نظر گرفتن تمام قیود، مدل ریاضی پیشنهادی توانسته است، محدوده‌ای شامل تعداد شش کارگاه استخراج مستقل با مجموع ارزش ۸۲,۱۲۸,۲۵۶ دلار را در زمان ۹ دقیقه و ۵۲ ثانیه



شکل ۱۱- محدوده بهینه کارگاه‌های استخراج زیرزمینی تعیین شده با مدل ریاضی پیشنهادی و با در نظر گرفتن محدودیت‌های حداقل و حداکثر ابعاد کارگاه‌های استخراج و حداقل ضخامت لنگه‌های جانبی



شکل ۱۲- برش قائم از محدوده تعیین شده با مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح پیشنهادی در  $Y=75$  m

#### ۴- نتیجه‌گیری

پیش‌بینی می‌شود به دلایلی مانند استخراج عمده ذخایر سطحی، نگرانی‌های زیست‌محیطی ناشی از حجم بالای تولید باطله در معدن کاری روباز و افزایش هزینه‌های حمل و باطله‌برداری؛ سهم استخراج زیرزمینی از تولید مواد معدنی در سال‌های آتی بسیار بیشتر از وضعیت کنونی باشد. با وجود نقش و اهمیت فراوانی که استخراج زیرزمینی در تولید مواد معدنی دارد بنا به دلایلی مانند پیچیدگی مدل‌سازی ذخایر زیرزمینی، تنوع زیاد در روش‌های استخراج، وجود فاکتورهای تاثیرگذار فراوان و عدم قطعیت‌های متعدد؛ در قیاس با روش استخراج روباز طراحی الگوریتم‌ها و برنامه‌های رایانه‌ای این حوزه روند کند و نامحسوسی دارد. یکی از مسایل مهم در طراحی معادن زیرزمینی، بهینه‌سازی محدوده کارگاه‌های استخراج است که با وجود تلاش‌های انجام شده هنوز از نواقص و ضعف‌هایی رنج می‌برد. در این مقاله از یک مدل ریاضی برنامه‌ریزی عدد صحیح جدید برای تعیین محدوده بهینه کارگاه‌های استخراج زیرزمینی استفاده شده است. در مدل ریاضی ارایه شده، بهینه‌سازی ارزش محدوده کارگاه‌های استخراج زیرزمینی همزمان با در نظر گرفتن محدودیت حداقل و حداکثر ابعاد کارگاه‌های استخراج در هر سه جهت طولی، عرضی و عمقی و همچنین حداقل ضخامت پایه‌های جانبی انجام شده است. مدل ریاضی جدید با روش کاهش متغیر تقویت شده است که در نتیجه آن زمان حل مسایل به میزان

قابل قبولی کاهش می‌یابد. اعتبارسنجی‌های انجام گرفته ثابت کرده است مدل پیشنهادی علاوه بر تضمین جواب بهینه در کاهش زمان حل مسایل نیز مفید عمل می‌کنند. با اجرای مدل جدید بر روی یک ذخیره سرب و روی علاوه بر تولید جواب بهینه، زمان حل مساله از ۲۲۷۴ به ۷۰۷ ثانیه کاهش یافته است.

#### منابع

- [1] Nikbin, V., Ataee-Pour, M., Anani, A., "Optimization of level intervals in steeply-dipping vein deposits: A two-step approach", Resources Policy, No. 69, pp. 1 - 12, 2020.
- [2] Riddle, J. M., "A dynamic programming solution of a block-caving mine layout", The 14th APCOM Symposium, Society of Mining Engineers-American Institute of Mining, Metallurgy and Petroleum Engineers, New York, 767 - 772, 1977.
- [3] Nikbin, V., Ataee-Pour, M., Shahriar, K., Pourrahimian, Y., "A Greedy Algorithm for Stope Boundaries Optimization", 8th Annual Report Mining Optimization Laboratory (MOL), pp. 246-252, 2017.
- [4] Ovanic, J., Young, D. S., "Optimisation of stope geometry using separable programming with special branch and bound techniques", Third Canadian Conference on Computer Applications in

- of Mining Science and Technology, No. 25 (5), pp. 767 – 772, 2015.
- [15] Hou, J., Xu, C., Dowd, P., Li, G., “Integrated optimisation of stope boundary and access layout for underground mining operations”, Mining Technology, No. 128 (4), pp. 193 – 205, 2019.
- [16] Asli Sari, Y., Kumral, M., “Sublevel stope layout planning through a greedy heuristic approach based on dynamic programming”, Journal of the Operational Research Society, pp. 1 – 10, 2020.
- [17] Foroughi, S., Hamidi, J.K., Monjezi, M., Nehring, M., “The integrated optimization of underground stope layout designing and production scheduling incorporating a non-dominated sorting genetic algorithm (NSGA-II)”, Resources Policy, 63, p.101408, 2019.
- [18] Nikbin, V., M. Ataee-pour., “An Integer Programming Algorithm for Stope Layout Optimization”, Amirkabir Journal of Civil Engineering, No. 48 (3), pp. 329-338, 2016.
- [19] Nikbin, V., Mardaneh, E., M., Asad, M. W. A., Topal, E., “Pattern search method for accelerating Stope boundary optimization problem in underground mining operations”, Engineering Optimization, No. 54 (5), pp. 1-13, 2021.
- [20] Furtado, M., Dimitrakopoulos, R., Pinto, C., “Stochastic stope design optimisation under grade uncertainty and dynamic development costs”, International Journal of Mining, Reclamation and Environment, Vol. 36 (2), pp. 1-23, 2021.
- [21] Sari, Y. A., Kumral, M., “Clustering-based iterative approach to stope layout optimization for sublevel stoping”, Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy, Vol. 121 (3), pp. 97-106, 2021.
- [22] Sotoudeh, F., Kakaie, R., Ataei, M., “Development of a computer program for underground mine stope optimisation using a heuristic algorithm”, Proceedings of the First International Conference on Underground Mining Technology, pp. 689-700, 2017.
- [23] Morales, N., Mancilla, D., Miranda, R., Vallejos, J., “A fast method to develop an optimal operational sublevel stope the Mineral Industry, McGill University, Montreal 129 - 135, 1995.
- [5] Alford, C., “Optimisation in underground mine design”, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics, No. 5, 1996.
- [6] Ataee-Pour, M., “A heuristic algorithm to optimise stope boundaries”, doctor of philosophy, university of Wollongong, New South Wales, 2000.
- [7] Jalali, S.E., Ataee-pour, M.; “A 2D Dynamic Programming Algorithm to Optimize Stope Boundaries”, in 2004 Proceedings of the 13<sup>th</sup> symposium on Mine Planning and Equipment Selection, (eds. M. Hardygora et al.), Rotterdam, Balkema, p. p. 45- 52, 2004.
- [۸] عطایی‌پور، مجید؛ جلالی، سید محمد اسماعیل؛ "انتخاب بهینه محدوده معدن و جانمایی کارگاه‌های استخراج در معادن زیرزمینی"، نشریه علمی - پژوهشی مهندسی معدن، شماره ۲۰، دوره ۸، ص ۷۳-۸۹، ۱۳۹۲.
- [۹] جلالی، سیدمحمد اسماعیل؛ حسینی، هادی؛ "بهینه‌سازی محدوده استخراج در معادن زیرزمینی با استفاده از الگوریتم حریصانه"، نشریه علمی - پژوهشی مهندسی معدن، شماره ۷، دوره ۴، ص ۱-۱۱، ۱۳۸۸.
- [10] Topal, E., Sens, J., “A new algorithm for stope boundary optimization”, Journal of Coal Science and Engineering (China), No. 16 (2), pp. 113 – 119, 2010.
- [11] Bai, X., Marcotte, D., Simon, R., “Underground stope optimization with network flow method”, Computers & Geosciences, No. 52, pp. 361 – 371, 2013.
- [12] Bai, X., Marcotte, D., Simon, R., “A heuristic sublevel stope optimizer with multiple raises”, Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy, No. 114 (6), pp. 427 – 434, 2014.
- [13] Nelis, G., Gamache, M., Marcotte, D., Bai, X., “Stope optimization with vertical convexity constraints”, Optimization and Engineering, No. 17 (4), pp. 813 – 832, 2016.
- [14] Sandanayake, D. S. S., Topal, E., Asad, M. W. A., “Designing an optimal stope layout for underground mining based on a heuristic algorithm”, International Journal

design”, Resources Policy, No. 77, 2022.

- [24] Nhleko, S., Musingwini, C., “Optimisation of Three-Dimensional Stope Layouts Using a Dual Interchange Algorithm for Improved Value Creation”, Minerals, 12, 501, pp. 1-16, 2022.
- [25] Shami-Qalandari, M., Rahmanpour, M., Mirabedi, S.M., “Determining a resilient stope boundary for underground mass mining projects”, Rudarsko-geološko-naftni zbornik, 37(5), pp.103-116, 2022.
- [26] Esmaili, A., Hamidi, J.K., Mousavi, A., “Determination of sublevel stoping layout using a network flow algorithm and the MRMR classification system”, Resources Policy, 80, p.103265, 2023.
- [27] Janiszewski, M., Pontow, S., Rinne, M., “Industry Survey on the Current State of Stope Design Methods in the Underground Mining Sector”, Energies, 15, 240, pp. 2-20, 2022.
- [28] Mutandwa, B., Musingwini, C., “Insights and future research directions from a bibliometric mapping of studies in stope layout optimization”, International Journal of Mining, Reclamation and Environment, pp.1-19, 2024.
- [29] Habib, K.M., Shnorhokian, S., Mitri, H., “Evaluating the application of rock breakage without explosives in underground construction—a critical review of chemical demolition agents”, Minerals, 12(2), p.220, 2022.
- [30] Atae-pour, M., “The MVN multiple pass algorithm for optimization of stope boundaries”, Iranian Journal of Mining Engineering (IRJME), 1(2):88-73, 2006.