

## Fractal modeling of the Cu-Au mineralization principal component values by considering the rejection of multivariate outlier data

Mirmahdi Seyedrahimi-Niaraq<sup>1\*</sup>, Hossein Mahdiyanfar<sup>2</sup>

1. Department of Mining Engineering, Faculty of Engineering, University of Mohaghegh Ardabili  
M.seyedrahimi@uma.ac.ir
2. Department of Mining Engineering, University of Gonabad,  
Hssn.mahdiyanfar@gmail.com

Received: 2023/09/10 - Accepted: 2024/02/18

### Abstract

Determining mineralization factors and paragenesis elements, anomaly identification, and geochemical potential mapping are important issues that are carried out using multivariate statistical methods. This study aims to identify the mineralization processes in the Tanurcheh region using geochemical data from the new integrated method of "fractal modeling of principal component data" based on principal component analysis (PCA) methods. Fractal concentration-area (C-A) have been used. For this purpose, data preparation will first be done using the multivariate Mahalanobis method. Outlier samples were identified and removed from the data to determine the role of rejecting multivariate outlier data in improving the results. The PCA method determined the role of rejecting multivariate outlier data. It was done on raw geochemical data and modified data separately. The results showed that the PCA method on raw data cannot determine the quality of paragenesis elements. Still, in the case of removing outlier samples with the Mahalanobis method, the results of the PCA method improved. Iron, arsenic, phosphorus, lead, strontium, molybdenum, copper, and gold were found as paragenesis elements at this stage. The first principal component was identified, and this multi-element mineralization factor was used to determine abnormal areas. The standard deviation-mean and concentration-area fractal methods were used to determine and separate the geochemical populations in the mineralization factor. The data of the principal components were implemented, and the distribution map of geochemical populations was drawn for different cases and compared with each other. The final results of the investigation of the mineralization process in the region with the mentioned methods showed that the multi-element geochemical anomaly map obtained from the fractal modeling of the principal components data showed significant agreement with field observations and mineralization outcrops..

### Keywords

Outlier data; Principal component analysis method; Concentration-area fractal method; Fractal modeling of the principal component data; Cu mineralization.

---

\* Corresponding Author



## 1- Introduction

Geochemical mapping and determination of geochemical populations significantly contribute to mineral exploration. Geochemical anomaly limits are determined with different univariate and multivariate methods [1,2]. The PCA method is one of the well-known methods in multivariate analysis. It identifies paragenesis elements and draws anomalous areas [3,4]. This method is a handy tool for combining several dependent variables in one variable and reducing the dimension of the data set in non-dependent principal components based on the covariance and correlation of the variables, which shows an internal correlation between the variables [5]. The principal component analysis (PCA) method was performed as a multivariate statistical method for geochemical location and frequency data. [6,7]. To determine the elements related to mineralization, to know the distribution pattern, how the elements are associated with each other, and to choose the mineralization factor, the principal component analysis method was used on geochemical data [8]. This method converts dependent variables with high dimensions into non-dependent principal components based on a correlation matrix [9]. In many cases, PCA has been used to analyze geochemical data to identify exploration indicators and determine mineralization characteristics [10-13]. Various fractal models in the frequency and space domains, including multiple methods of concentration area, concentration distance, power spectrum area, and concentration volume, have been used in geochemical explorations [14-19]. Different geological and mineralization phenomena may create complications in geochemical data, especially in forming different geochemical populations. These populations can be distinguished using the fractal models available in the data [14-20]. One of the powerful methods of fractal modeling is the concentration-area (C-A) fractal method, which was introduced to determine geochemical populations and to separate anomalies from the background [21-23]. The advantages of fractal models can be used to develop integrated models [24,25]. Considering that outlier data affects the results of multivariate analysis, identifying and removing these data can also be done to improve the results. Outlier data in geochemistry can significantly affect the results of statistical and computational methods and the geochemical anomaly map [26]. In this article, a new integrated method of fractal modeling of principal component data has been developed by removing outlier geochemical data. Various methods have been presented to identify outlier data [27,28], and the Mahalanobis distance method has been used in this research. This method is considered as a parametric statistical method [29,30]. In the next step, while examining the fractal characteristics of the data of the main components, the modeling of these data has been done. The advantages of this new method over the previous methods of detailed investigation of mineralization populations and the improvement of the results in revealing the mineralization process in the study area can be mentioned.

## 2- Methods and Findings

### 2-1- Case study and data

Tanurcheh region is located on the Khaf-Droneh volcano-plutonic belt, and some of its special features include mineralization potential. The area's geology consists of a series of andesitic and rhyolitic volcanics. The most important intrusive mass that has been subtracted and exposed is quartz porphyry stocks. The hydrothermal alteration of this region has a variety of propylitic, argillic, and ceristic alterations. Propylitic alteration, including abundant chlorite and small amounts of epidote, is well distributed among volcanic assemblages [31]. Litho-geochemical samples were taken in the area, and 95 rock and soil samples were collected. Based on chi-square distribution, 11 samples were identified as outlier samples.

### 2-2- Multivariate Mahalanobis method

The Mahalanobis distance method is a multivariate method used to detect outlier data. This index is measured based on the covariance matrix. Mahalanobis distance is calculated as follows:

$$(1) \quad \text{Subscript}MD_i = ((x_i - t)^T C^{-1}(x_i - t))^{1/2}$$

where  $x_i$ ,  $t$ , and  $C$  are the multivariate sample, the estimated multivariate location, and the covariance matrix, respectively. When multivariate data are normally distributed, values are approximately chi-squared. The chi-square distribution shows that multivariate outliers with a high Mahalanobis distance value can be distinguished from standard data [33]. A fixed percentage of the chi distribution separates the outliers from the standard points. Using the threshold value calculated by  $\sqrt{\chi_{1-\alpha, v}^2}$ , The samples are divided into two groups: abnormal and normal data. So  $v$  is the degree of freedom of the variables, and  $\alpha$  is the significance level [34].

### 2-3- Fractal modeling of PCA data

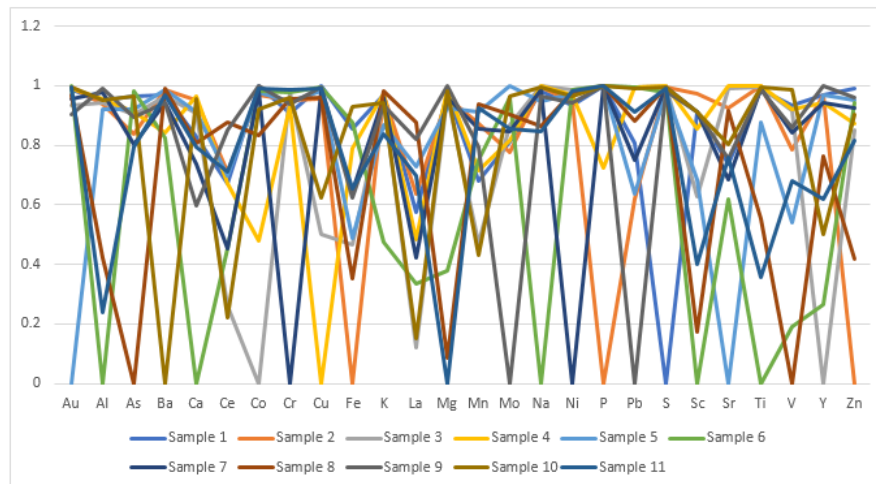
The PCA method can produce multi-element indices under principal components, which are obtained based on various geological and mineralization processes in the region and are used to prepare the mineral potential map[35]. These indices are based on eigenvalues and eigenvectors of primary variables. The primary data are rotated in the new space using the Varimax 3 method [36,37]. New geochemical indices, according to the created axes, are obtained. The PCs obtained by the PCA method can be modeled using fractal methods. Determining the fractal dimension is the basis of these methods for determining geochemical patterns. If a smooth model of the spatial distribution of elements is presented by contour maps, in these maps,  $A(\rho)$  is a region of the contour with concentration  $\rho$ . As the concentration increases, the area decreases. To define the field and geochemical anomaly, the grade-area fractal model is defined as follows [38]:

$$(2) \quad A(\rho)_{(>\rho)} \alpha \rho^{-D}$$

Where  $A(\rho)$  is the area of the meter with a concentration more significant than the value of  $\rho$ , and  $D$  is the exponential characteristics or fractal dimensions. A network of cells can be overlapped in the studied area. In this case, obtaining  $A(\rho)$  by counting cells with raw grade or PC value of elements is possible. In this method, for concentrations higher than the desired counter,  $A(\rho)$  equals the number of cells in the area of the cells. Considering that in geochemical surveys, anomalies show concentrations related to mineralization processes, these values will have power functions or fractal dimensions different from background values. This difference in fractal dimensions is used to separate anomalous areas from the background [38-40]. Geochemical anomalies have larger fractal dimensions than geochemical populations. Therefore, the border between these fractal dimensions can be considered threshold values. The threshold value separates the anomalous values from the geochemical background. C-A fractal modeling of PCA data classifies mineralization populations and accentuates geochemical anomalies.

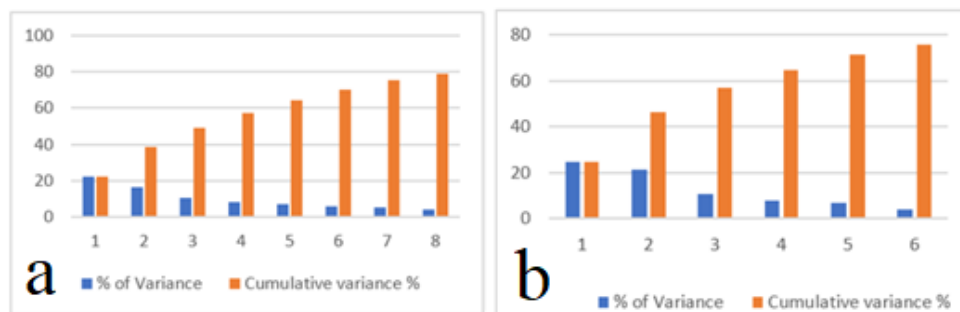
### 2-4- Improve results by correcting outlier data

The concentration of different elements in these samples was analyzed to investigate the behavior of elements in outlier samples. The maximum or minimum value of the various elements compared to other samples in that element affects the Mahalanobis distance and is decisive in whether the samples are out of line. Therefore, to check these characteristics, the standardized values of outlier samples were drawn for different elements (Figure 1). In general, the graph shows well that the samples are out of line due to the quality of several elements, especially the maximum values. Therefore, removing these outliers in the following stages of data analysis can play a helpful role in achieving accurate results.



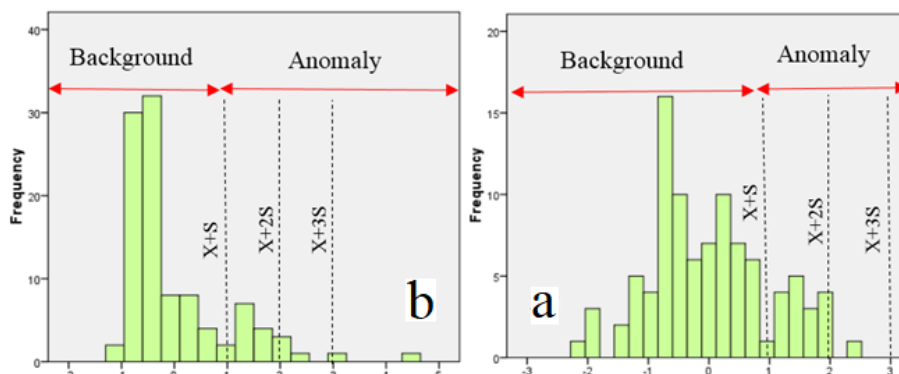
**Figure 1. Standard values (zero to one) of element concentrations for outlier samples**

The PCA method was performed separately on the logarithmic values of both data sets, including raw data and data without outlier values, and the mineralization component was determined based on the influence of the copper element, among other main components. The PCA method, based on the logarithmic values of the raw data of the area, could not show the association of gold with copper. In addition, other paragenesis elements were not well identified. The PCA method reduced the 25 elements to 8 main components in the raw data. In this case, each component's variance value and the main factors' cumulative variance values were obtained and plotted for comparison (Figure 2). Cu is the fourth main component, and this component is identified as the mineralization factor. This component justifies 8% of the variance in the data. The status of paragenesis elements in this factor was also investigated.



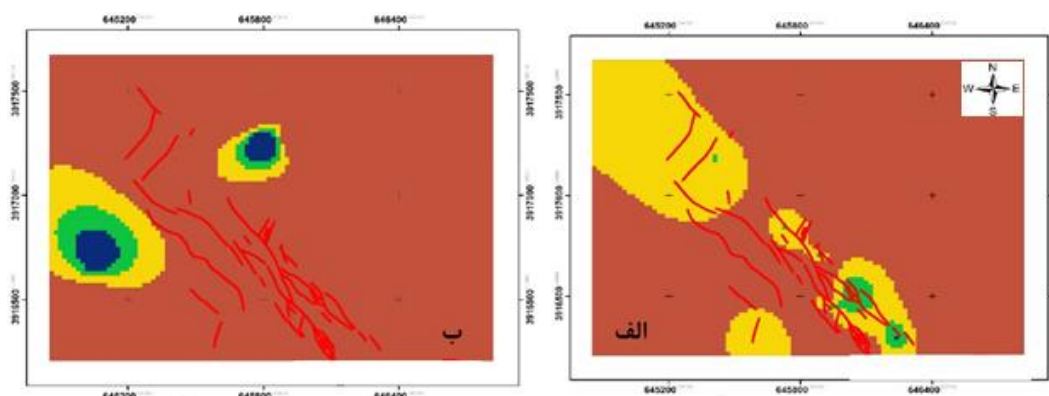
**Figure 2. The graph related to the amount of variance of the main components in the PCA method (a: raw data and b: modified data)**

Figure 3 shows the histogram of copper mineralization factors obtained by the PCA method in two modes. Considering that the PCA method shows more suitable results on the corrected data after removing the outlier values and the paragenesis elements of Cu mineralization are well defined, these results can be the improved results used to determine the anomalous areas. Values less than the sum of standard deviation and mean are considered geochemical backgrounds. Values higher than this threshold are defined as geochemical populations, including weak, medium, and strong anomalies. Values between  $x+s$  and  $x+2s$  are called weak anomalies, and values between  $x+2s$  and  $x+3s$  are medium anomalies. Values higher than  $x+3s$  are also considered strong anomalies.



**Figure 3. Histogram diagram of copper mineralization factors resulting from PCA method and threshold limit values and background and anomaly populations, a) mineralization factor in data modified by Mahalanobis method, b) mineralization factor in data raw**

Figure (4) shows the map of geochemical populations and anomalous areas related to factorization resulting from the PCA method in raw and modified data. In this Figure, none of the anomalous populations obtained from the mineralization factor in the raw data are compatible with the mineralization veins, but in the mineralization factor related to the modified data, part of the mineralization veins is placed on the anomalous populations and confirmed the results of this method. The distribution map of geochemical populations obtained in this study shows the negative impact of outlier data on multivariate analysis. Therefore, identifying and removing outlier data can improve the geochemical anomaly map.



**Figure 4. Map of the limit of geochemical anomalies related to mineralization factor resulting from PCA based on the standard deviation-mean method, a) The first principal component in the modified data, b) The fourth principal component in the raw data**

## 2-5- Fractal modeling of PCA data after removing outlier data

To intensify regional anomalies and reduce the background effect, in this study, the fractal characteristics of PCA method results after removing outlier values were examined and modeled by the concentration-area fractal method for the first time. First, the usual PCA method was performed on the log-ratio geochemical data to prepare the input for modeling. In the next step, a constant number was added to all PCA factor scores to generate positive data. Then, the new PCA values were modeled using the C-A fractal method. Using the conventional kriging technique, a grid of 19.6 x 19.6 square meters was used to estimate the concentration and forecast the data. This technique was implemented on PCA values. After the network estimation and classification of the estimated data, the logarithmic diagram of the concentration area was drawn from the variables. This diagram identified different populations with different fractal dimensions (Figure 5).

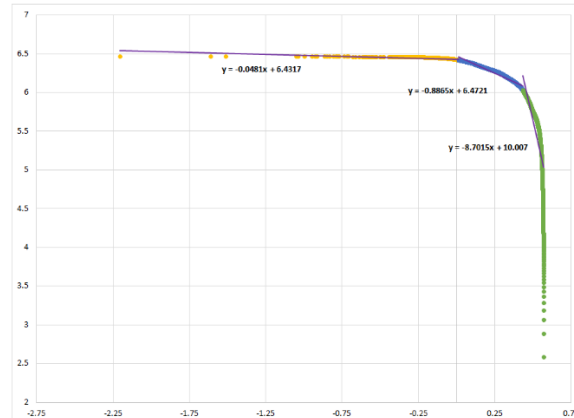


Figure 5. C-A fractal model of PC1 data

The results obtained with this integrated method are two distribution maps of geochemical grades in Figure (10-a) and anomalous geochemical regions in Figure (10-b). In this figure, the anomalous areas are marked with a threshold value of 0.9, and the direction of mineralization is also shown. Also, to compare and validate the results, the mineralization veins' location in the area is shown with red lines on these maps. The location of the mineralization zones obtained from the integrated method of fractal modeling of PCA data is consistent with the area's mineralization trend. This mineralization trend was introduced west of the area in the northwest-southeast direction, which was separated by the new method with great accuracy (Figure 10-a). Also, the anomalous regions introduced in Figure (10-b) confirm this match more accurately than the PCA method. It seems that the results of the multi-element analysis by the PCA method provide a more realistic input for data modeling with the fractal concentration-area method. As a result, the ability to perform heuristic predictions with the newly integrated method has greatly increased. Considering that the PCA method could identify the paragenesis elements of mineralization and provide a multivariate index of these paragenesis, the C-A fractal modeling of the resulting mineralization component improved the anomalous areas.

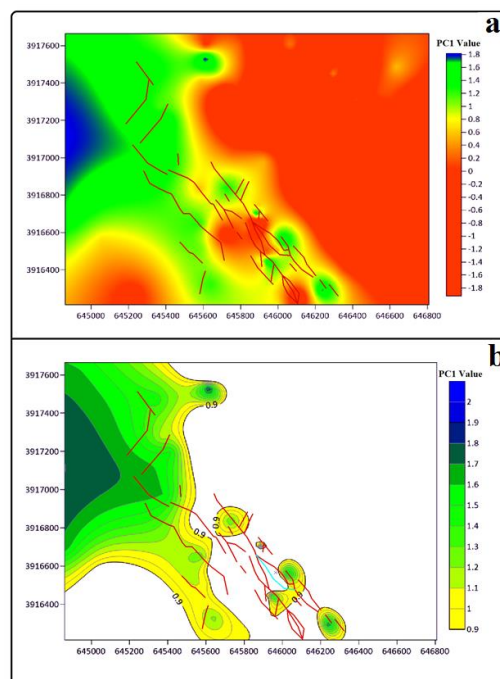


Figure 10. a) geochemical distribution map resulting from fractal modeling of PCA data area in class PC1, b) anomalous geochemical regions prepared from fractal modeling of PCA data area

### 3- Conclusions

Using the standard deviation-mean statistical method, the map of geochemical populations (background, weak anomaly, medium anomaly, and strong anomaly) was obtained for mineralization factors in raw and modified data. Anomaly populations obtained from the raw data did not show any correspondence with the mineralization veins. In the modified data state, part of the mineral veins was placed in the anomalous areas, and the map of the anomalous areas was somewhat improved. By implementing the concentration-area fractal model on the main component data and developing the integrated method, the mineralization process in the region (northwest-southeast) was detected more accurately, and the anomalous areas obtained by field observations of the region and the geological information showed a perfect match. The results of multi-element investigations by the PCA method seem to provide a more realistic input for data modeling with the fractal concentration-area method. Also, the fractal method's ability to accurately separate mineralization populations increased the ability of exploratory prediction in the new integrated method.

### References

1. Seyedrahimi-Niaraq, M., Mahdiyanfar, H., Mokhtari, A. R.; 2022; "Integrating principal component analysis and U-statistics for mapping polluted areas in mining districts." *Journal of Geochemical Exploration*, 234, 106924.
2. Salomão, G. N., Dall'Agnol, R., Angelica, R. S., Sahoo, P. K., & Wang, X.; 2021; "Geochemical mapping in stream sediments of the Carajás Mineral Province, part 2: Multi-element geochemical signatures using Compositional Data Analysis (CoDA)", *Journal of South American Earth Sciences*, 110, 103361.
3. Farzamian, M., Mahdiyanfar, H., & Rouhani, A. K.; 2022; "Evidential belief functions modeling of geophysical and multi-element geochemical data for Pb-Zn mineral potential targeting," *Journal of African Earth Sciences*, 104606.
4. Seyedrahimi-Niaraq, M., Mahdiyanfar, H.; 2021; "Introducing a new approach of geochemical anomaly intensity index (GAII) for increasing the probability of exploration of shear zone gold mineralization," *Geochemistry*, 81(4), 125830.
5. Jolliffe, I.T.; 2002; "Principal Component Analysis", 2nd ed. Springer, New York, 547 NY.487 pp.
6. Shahi, H.; 2017; "Prediction of dispersed mineralization zone in depth using frequency domain of surface geochemical data," *Journal of Mining and Environment*, 8(3), 433-446.
7. Shahi, H., Ghavami, R., Rouhani, A. K., Kahoo, A. R., Haroni, H. A.; 2015; "Application of Fourier and wavelet approaches for identification of geochemical anomalies," *Journal of African Earth Sciences*, 106, 118-128.
8. Cheng, Q., Bonham-Carter, G., Wang, W., Zhang, S., Li, W., Xia, Q.; 2011; "A spatially weighted principal component analysis for multi-element geochemical data for mapping locations of felsic intrusions in the Gejiu mineral district of Yunnan, China," *Computer and Geoscience*, 37, 662-669.
9. Kamani, M.M., Haddadpour, F., Forsati, R. and Mahdavi, M.; 2022; "Efficient, fair principal component analysis." *Machine Learning*, pp.1-32.
10. Farzamian, M., Rouhani, A. K., Yarmohammadi, A., Shahi, H., Sabokbar, H. F., & Ziaie, M.; 2016; "A weighted fuzzy aggregation GIS model in the integration of geophysical data with geochemical and geological data for Pb-Zn exploration in Takab area, NW Iran," *Arabian*

- Journal of Geosciences, 9(2), 104.
11. Davis, J.C.; 2002; "Statistics and Data Analysis in Geology," 3rd ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 550 pp.
  12. Zuo, R.; 2011; "Identifying geochemical anomalies associated with Cu and Pb-Zn skarn mineralization using principal component analysis and spectrum-area fractal the Gangdese Belt, Tibet (China)." *J. Geochemical Exploration*, 111, 13-22.
  13. Shahi H, Ghavami R, Kamkar Rouhani K, Asadi-Haroni H.; 2014; "Identification of mineralization features and deep geochemical anomalies using a new FT-PCA approach," *Journal of Geopersia*, 4 (2), 101-110.
  14. Zuo, Renguang, and Jian Wang. "Fractal/multifractal modeling of geochemical data: A review." *Journal of Geochemical Exploration* 164 (2016): 33-41.
  15. Mahdianfar, Hossein. "A Critique on Power Spectrum–Area Fractal Method for Geochemical Anomaly Mapping." *Journal of Analytical and Numerical Methods in Mining Engineering* 10, no. 25 (2020): 33-41.
  16. Pirdadeh Beyranvand, D., Arian, M. A., Farhadinejad, T., & Ashja Ardalan, A. (2021). Identification of Geochemical Distribution of REEs Using Factor Analysis and Concentration-Number (CN) Fractal Modeling in Granitoids, South of Varcheh 1: 100000 Sheet, Central Iran. *Iranian Journal of Earth Sciences*, 13(4), 288-289.
  17. Safari, M., Babaei, A. H., Daya, A. A., & Manouchehriniya, M. (2022). Separating geochemical anomalies by concentration-area, concentration-perimeter, and concentration-number fractal models in Qaen region, East of Iran. *Iranian Journal of Earth Sciences*, 14(4), 271-284.
  18. Hosseini, S. A., Khah, N. K. F., Kianoush, P., Afzal, P., Ebrahimabadi, A., & Shirinabadi, R. (2023). Integration of fractal modeling and correspondence analysis reconnaissance for geochemically high-potential promising areas, NE Iran. *Results in Geochemistry*, 11, 100026.
  19. Paravarzar, S., Mokhtari, Z., Afzal, P., & Aliyari, F. (2023). Application of an approximate geostatistical simulation algorithm to delineate the gold mineralized zones characterized by fractal methodology. *Journal of African Earth Sciences*, 200, 104865.
  20. Pourgholam, Mohammad Mahdi, Peyman Afzal, Amir Bijan Yasrebi, Mehran Gholinejad, and Andrew Wetherelt. "Detection of geochemical anomalies using a fractal-wavelet model in Ipak area, Central Iran." *Journal of Geochemical Exploration* 220 (2021): 106675.
  21. Cheng, Qiuming, F. P. Agterberg, and S. B. Ballantyne. "The separation of geochemical anomalies from background by fractal methods." *Journal of Geochemical Exploration* 51, no. 2 (1994): 109-130.
  22. Seyedrahimi-Niaraq, M., & Hekmatnejad, A. (2021). The efficiency and accuracy of probability diagram, spatial statistic, and fractal methods in the identification of shear zone gold mineralization: a case study of the Saqqez gold ore district, NW Iran. *Acta Geochimica*, 40, 78-88.
  23. Seyedrahimi-Niaraq, M., Mahdianfar, H., & Mokhtari, A. R. (2023). Application of geochemical structural methods to determine lead-contaminated areas related to mining activities. *Journal of Analytical and Numerical Methods in Mining Engineering*, 13(34), 41-55.
  24. Mahdianfar, H., & Seyedrahimi-Niaraq, M. (2021). Power spectrum–area fractal modeling of data obtained from spectral analysis of U spatial statistics to separate porphyry copper

- geochemical anomaly areas. *Journal of Mining Engineering*, 16(50), 59-72.
25. Mahdiyanfar, H., & Seyedrahimi-Niaraq, M. (2023). Integration of Fractal and Multivariate Principal Component Models for Separating Pb-Zn Mineral Contaminated Areas. *Journal of Mining and Environment*, 14(3), 1019-1035.
  26. Kianpurian, S., Asadi-Haruni H., Afshari, S., & Farahmandian, M. (2015). Univariate and multivariate outlier detection in exploration geochemistry: A case study of Sari Gunay epithermal gold deposit. *Journal of Mining Engineering*, 9(25), 85-96.
  27. Han, J., Kamber, M., Pei, J.; 2012; "Data Mining: Concepts and Techniques," Morgan Kaufmann, 740 p.
  28. Ranga Suri, N.N.R., Murty, N., Athithan, G.; 2019; "Outlier Detection: Techniques and Applications: A Data Mining Perspective," Springer International Publishing, 216 p.
  29. Aggarwal, C. C.; 2016; "Outlier analysis," Second Edition. Springer, New York, 54p.
  30. Ahn, J., Lee, M.H., Lee, J.A.; 2019; "Distance-based outlier detection for high dimension, low sample size data," *Journal of Applied Statistics*, 2019, 46, 13-29.
  31. Karimpour M.; 2004; "Geological report of Tanurcheh mineralization area," Zarmehr Company.
  32. Begashaw, G. B. and Yohannes, Y. B.; 2020; "Review of outlier detection and identifying using robust regression model," *Int. J. Syst. Sci. Appl. Math.* 5: 4–11.
  33. Filzmoser, P., Reimann, C. and Garrett, R. G. A.; 2004; "Multivariate outlier detection method."
  34. Hassan, S., Byun, H. and Kim, J.; 2021; "Iterative Smoothing and Outlier Detection for Underwater Navigation." arXiv preprint arXiv:2109.14220.
  35. Eilu, P., Groves, D., 2001, Primary alteration and geochemical dispersion haloes of Archaean orogenic gold deposits in the Yilgarn Craton: the pre-weathering scenario. *Geochemistry: Exploration, Environment, Analysis*, 1: 183-200.
  36. Kaiser, H. F. (1958). The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika* 23, 187–200. Doi: 10.1007/BF02289233.
  37. Acal, C., Aguilera, A.M., and Escabias, M. (2020). New modeling approaches based on the varimax rotation of functional principal components. *Mathematics*, 8(11), p. 2085.
  38. Cheng, Q., Agterberg, F.P., and Ballantyne, S.B. (1994). The separation of geochemical anomalies from background by fractal methods. *Journal of Geochemical Exploration*, 51, 109–130.
  39. Yousefi, M. and Carranza, E.J.M. (2015). Prediction–area (P–A) plot and C–A fractal analysis to classify and evaluate evidential maps for mineral prospectivity modeling. *Computers & Geosciences*, 79: 69-81.
  40. Madani, N. and Sadeghi, B. (2019). Capturing Hidden Geochemical Anomalies in Scarce Data by Fractal Analysis and Stochastic Modeling. *Natural Resources Research*, 28: 833-847.

مقاله پژوهشی

## مدل سازی فرکتالی داده‌های مولفه اصلی کانی سازی مس - طلا با در نظر گرفتن حذف داده‌های خارج از ردیف چندمتغیره

میرمهدی سیدرحیمی نیارق<sup>۱\*</sup>، حسین مهدیان فر<sup>۲</sup>

۱. دانشیار دانشگاه محقق اردبیلی، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی معدن، m.seydrahimi@uma.ac.ir  
۲. استادیار مجتمع آموزش عالی گناباد، گروه مهندسی معدن، Hssn.mahdianfar@gmail.com

دریافت: ۱۴۰۲/۰۶/۱۹ - پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۲۹

### چکیده

تعیین فاکتورهای کانی سازی و عناصر پاراژنز، شناسایی آنومالی و ترسیم نقشه پتانسیل ژئوشیمیایی از موضوعات مهمی است که با استفاده از روش‌های آماری چند متغیره انجام می‌شوند. در این مطالعه، برای شناسایی فرآیندهای کانی سازی در منطقه تنورچه روی داده‌های ژئوشیمیایی، از روش جدید تلفیقی "مدل سازی فرکتالی داده‌های مولفه‌های اصلی" بر اساس روش‌های تحلیل مولفه‌های اصلی (PCA) و فرکتالی عیار-مساحت (C-A) استفاده شده است. بدین منظور ابتدا برای آماده‌سازی داده‌ها با استفاده از روش چند متغیره فاصله ماهالانوبیس نمونه‌های خارج از ردیف شناسایی و از مجموعه داده‌ها حذف شدند و روش PCA بر روی داده‌های خام ژئوشیمیایی و داده‌های اصلاح شده به صورت جداگانه انجام شد تا نقش حذف داده‌های خارج از ردیف چندمتغیره در بهبود نتایج مشخص شود. نتایج نشان داد روش PCA بر روی داده‌های خام نمی‌تواند به خوبی عناصر پاراژنز را مشخص کند ولی در حالت حذف نمونه‌های خارج از ردیف با روش ماهالانوبیس نتایج روش PCA بهبود پیدا کرد. در این مرحله عناصر آهن، آرسنیک، فسفر، سرب، استرانسیوم، مولیبدن، مس و طلا به عنوان عناصر پاراژنز در مولفه اصلی اول مشخص شدند و این فاکتور چند عنصری کانی سازی برای تعیین مناطق آنومال مورد استفاده قرار گرفت. به منظور تعیین و جدایش جوامع ژئوشیمیایی موجود در فاکتور کانی سازی، روش‌های انحراف معیار- میانگین و روش فرکتالی عیار-مساحت روی داده‌های مولفه‌های اصلی پیاده‌سازی شد و نقشه توزیع جوامع ژئوشیمیایی برای حالت‌های مختلف ترسیم و با یکدیگر مقایسه شد. نتایج نهایی بررسی روند کانی سازی در منطقه با روش‌های یاد شده نشان داد نقشه آنومالی ژئوشیمی چند عنصری حاصل از مدل سازی فرکتالی داده‌های مولفه‌های اصلی با مشاهدات میدانی و رخنمون‌های کانی سازی انطباق قابل توجهی نشان می‌دهد.

### کلمات کلیدی

داده‌های خارج از ردیف، تحلیل مولفه‌های اصلی، روش فرکتالی عیار-مساحت، مدل سازی فرکتالی داده‌های مولفه‌های اصلی، کانی سازی مس.

## ۱- مقدمه

متشابهی داده‌ها مورد بررسی قرار می‌دهد. مدل‌های فرکتالی مختلفی در حوزه فرکانس و حوزه مکان شامل انواع روش‌های عیار- مساحت، عیار- فاصله، طیف توان- مساحت و عیار- حجم در اکتشافات ژئوشیمیایی مورد استفاده قرار گرفته است [۱۹-۱۴]. پدیده‌های مختلف زمین‌شناسی و کانی‌سازی ممکن است پیچیدگی‌هایی در داده‌های ژئوشیمیایی به ویژه در تشکیل جوامع مختلف ژئوشیمیایی ایجاد کنند. این جوامع می‌توانند با استفاده از مدل‌های فرکتالی موجود در داده‌ها از یکدیگر متمایز شوند [۱۴ و ۲۰]. یکی از روش‌های توانمند مدل‌سازی فرکتالی، روش فرکتالی عیار- مساحت<sup>۲</sup> است که برای تعیین جوامع ژئوشیمیایی و جدایی آنومالی از زمینه معرفی شد [۲۳-۲۱]. از مزایای یاد شده مدل‌های فرکتالی می‌توان در توسعه مدل‌های تلفیقی استفاده کرد [۲۴ و ۲۵]. با توجه به اینکه داده‌های خارج از ردیف بر روی نتایج تحلیل‌های چندمتغیره اثر می‌گذارد شناسایی و حذف این داده‌ها نیز می‌تواند برای بهبود نتایج انجام پذیرد. داده‌های پرت در ژئوشیمی ممکن است، اثرات زیادی بر روی نتایج روش‌های آماری و محاسباتی بگذارند و نقشه آنومالی ژئوشیمیایی را تحت تاثیر قرار دهند [۲۶]. بنابراین در توسعه روش‌های جداسازی آنومالی از زمینه ژئوشیمیایی باید این مورد در آماده‌سازی داده‌ها مدنظر قرار گیرد.

در این مقاله روش جدید تلفیقی مدل‌سازی فرکتالی داده‌های مولفه اصلی با حذف داده‌های ژئوشیمیایی خارج از ردیف توسعه داده شده است. روش‌های مختلفی برای شناسایی داده‌های خارج از ردیف ارائه شده [۲۷ و ۲۸] که در این پژوهش از روش فاصله ماهالانویس استفاده شده است. این روش از روش‌های آماری پارامتریک محسوب می‌شود [۲۹ و ۳۰]. در مرحله بعد ضمن بررسی ویژگی‌های فرکتالی داده‌های مولفه اصلی، به مدل‌سازی این داده‌ها پرداخته شده است. از مزایای این روش جدید نسبت به روش‌های قبلی بررسی دقیق جوامع کانی‌سازی و همچنین بهبود نتایج در آشکارسازی روند کانی‌سازی در منطقه مورد مطالعه می‌توان اشاره کرد.

## ۲- منطقه مورد مطالعه

منطقه تنورچه بر روی کمر بند ولکانوپلوتونیک خواف- درونه واقع شده است و برخی از ویژگی‌های خاص این کمر بند از نظر پتانسیل کانی‌سازی را شامل می‌شود. نقشه زمین‌شناسی منطقه در شکل ۱ نشان داده شده است. سنگ‌شناسی محدوده اکتشافی

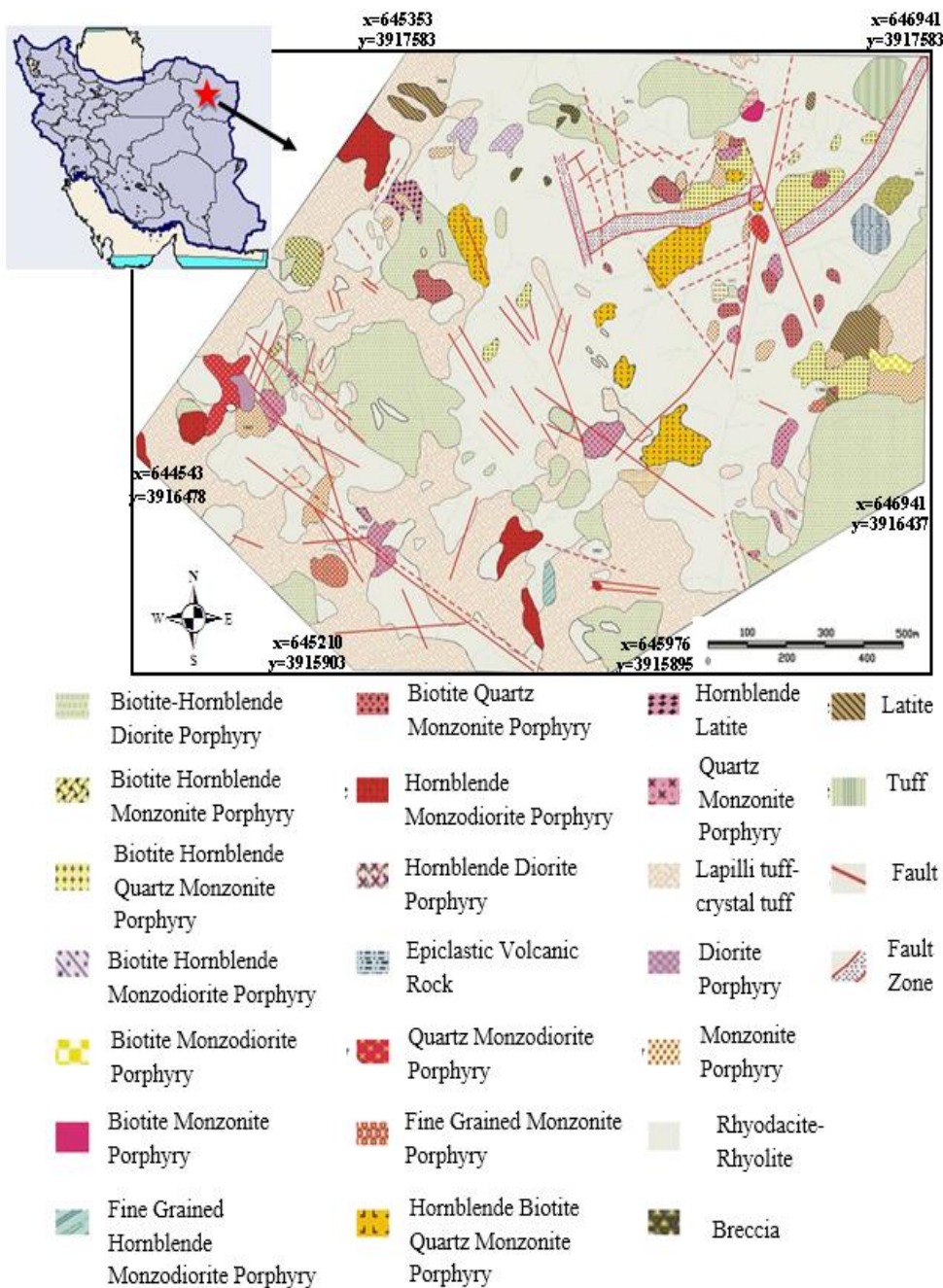
شناسایی مناطق آنومالی ژئوشیمیایی در محیط‌های مختلف از جمله خاک، سنگ، و رسوبات رودخانه‌ای از اقدامات مهم اکتشافی محسوب می‌شود و در این راستا تعیین مقادیر حدآستانه‌ای ضروری به نظر می‌رسد. نقشه برداری ژئوشیمیایی و تعیین جوامع ژئوشیمیایی کمک زیادی به اکتشافات کانسازی می‌کند. تعیین محدوده‌های آنومالی ژئوشیمیایی با روش‌های مختلف تک‌متغیره و چندمتغیره انجام می‌شود [۲۰ و ۲]. علاوه بر این تجزیه و تحلیل داده‌های ژئوشیمیایی برای استخراج ویژگی‌های اکتشافی عناصر یکی از موضوعات مهم در اکتشاف منابع معدنی است. از این‌رو تعیین روابط حاکم بر این داده‌ها می‌تواند اطلاعات اکتشافی قابل توجهی در اختیار قرار دهد. روش PCA یکی از روش‌های مشهور در آنالیز چندمتغیره است و برای شناسایی عناصر پاراژنز و همچنین ترسیم مناطق آنومالی به کار می‌رود [۳ و ۴]. این روش ابزاری بسیار مفید برای ترکیب چند متغیر وابسته در یک متغیر و کاهش بعد مجموعه داده‌ها در مولفه‌های اصلی غیروابسته بر اساس کواریانس و همبستگی متغیرها است که یک همبستگی درونی میان متغیرها را نشان می‌دهد [۵]. روش تحلیل مولفه‌های اصلی<sup>۱</sup> به عنوان یک روش آماری چندمتغیره روی داده‌های حوزه مکان و فرکانس ژئوشیمی انجام شده است. [۶ و ۷]. برای تعیین عناصر مرتبط با کانی‌سازی، شناخت الگوی توزیع، چگونگی همراهی عناصر با یکدیگر و تعیین فاکتور کانی‌سازی از روش تحلیل مولفه‌های اصلی بر روی داده‌های ژئوشیمیایی استفاده شده است [۸]. در این روش، متغیرهای وابسته با ابعاد بالا بر اساس ماتریس همبستگی به مولفه‌های اصلی غیروابسته تبدیل می‌شوند [۹]. در بسیاری از موارد برای تجزیه و تحلیل داده‌های ژئوشیمیایی به منظور شناسایی شاخص‌های اکتشافی و تعیین ویژگی‌های کانی‌سازی از PCA استفاده شده است [۱۳-۱۰]. روش تحلیل مولفه‌های اصلی بر مبنای مقادیر ویژه و بردار ویژه انجام می‌شود. بردار ویژه می‌تواند کمک کند تا در میان داده‌ها خطی کشیده شود که بیشترین دامنه تغییرات در امتداد آن خط رخ داده باشد و بر این اساس مولفه‌های اصلی که بیشترین تغییرات موجود در داده‌ها را توجیه می‌کنند، شناسایی می‌شوند.

مدل‌سازی فرکتالی داده‌ها یکی از روش‌های مهم در اکتشاف مناطق آنومالی ژئوشیمیایی ذخایر معدنی است. این روش تغییرات جوامع موجود در داده‌ها را بر اساس ویژگی خود

<sup>2</sup> Concentration-area Fractal Method (C-A)<sup>1</sup> Principal Component Analysis (PCA)

کانی سازی است. مهم ترین توده نفوذی تفریق یافته و ظاهر شده، استوک های کوارتز پورفیری است. این توده نفوذی شامل کوارتزهای چشمی گرد و درشت، بیوتیت دگرسان شده همراه با فلدسپات در یک خمیره سیلیسی ریزدانه است. همچنین در این نفوذی ها آثار و بقایایی از ذرات پیریت پراکنده مشاهده می شود. دگرسانی های هیدروترمال این منطقه دارای تنوعی از دگرسانی پروپیلیتیک، آرزلیک و سریستیک است. دگرسانی پروپیلیتیک شامل کلریت فراوان و مقادیر کمی اپیدوت در میان مجموعه های ولکانیکی به خوبی گسترش یافته است [۳۱].

و نواحی اطراف اغلب شامل ولکانوکلاستیک ها و گدازه های اسیدی تا متوسط با سن ائوسن است. این مجموعه ولکانیکی به وسیله توده های نفوذی متنوعی با سن الیگوسن - میوسن عمدتاً با ترکیب گرانودیوریت، کوارتز مونزونیت، دیوریت قطع شده اند. زمین شناسی این منطقه شامل مجموعه ای از ولکانیک های آندزیتی و ریولیتی است. در میان این مجموعه ولکانیکی توده های گرانودیوریت، دیوریت و کوارتز پورفیری با اشکال استوک و دایک نفوذ کرده اند. تنوع توده های نفوذی رخنمون یافته بیانگر فازهای چندگانه فعالیت ماگمایی از آن جمله نفوذ دایک های دیوریتی عقیم بعد از



شکل ۱- نقشه واحدهای سنگی محدوده مورد مطالعه [۳۱]

ویژگی‌های چندمتغیره و کاهش ابعاد است. این روش مولفه‌های غیرهمبسته جدید را از چندین ویژگی اولیه دارای همبستگی استخراج می‌کند و ابعاد فضای ویژگی در مجموعه داده را کاهش می‌دهد [۱۲]. PCA بر اساس کوواریانس یا همبستگی ویژگی‌ها محاسبه می‌شود. اجزای اصلی به عنوان محورهای مختصات در فضای ویژگی‌های جدید با استفاده از روش چرخش Varimax به دست می‌آیند. این تابع چرخش واریانس ضرایب را به حداکثر می‌رساند و فضای مولفه‌ها را با استفاده از رگرسیون حداقل مربعات به ساختار متعامد تبدیل می‌کند [۳۵ و ۳۶]. روش Varimax ماتریس ضرایب مولفه‌های اصلی را با ضرب کردن در یک ماتریس متعامد می‌چرخاند. ساختارهای پنهان مجموعه داده‌ها را می‌توان با استفاده از روش Varimax شناسایی کرد [۲۶ و ۳۷].

مقادیر جدید برای هر نمونه بر اساس محورهای چرخش یافته در فضای جدید محاسبه می‌شود. بنابراین، هر نمونه دارای یک مقدار مشخص از هر مولفه اصلی است. این مقادیر به عنوان ویژگی‌های ژئوشیمیایی چندمتغیره جدید را می‌توان به جای غلظت عناصر تجزیه و تحلیل کرد. این ویژگی‌های جدید در مولفه کانی‌سازی برای هر نمونه با استفاده از رابطه ۲ محاسبه می‌شود:

$$Score = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p \quad (2)$$

ضرایب  $b$  مربوط به وزن رگرسیونی مولفه‌های اصلی و مقادیر  $X$  غلظت اولیه عناصری است که در ایجاد فاکتور کانی‌سازی نقش دارند. مقادیر و نمرات بدست آمده برای نمونه‌ها در فاکتور کانی‌سازی در روش PCA را می‌توان به عنوان ویژگی‌های چندمتغیره ژئوشیمیایی مورد تحلیل و مدل‌سازی قرار داد [۳۸].

### ۳-۳-۳ مدل‌سازی فرکتالی عیار - مساحت داده‌های PCA

روش PCA می‌تواند شاخص‌های چندعنصری با عنوان مولفه‌های اصلی را تولید کند که این شاخص‌ها بر مبنای فرآیندهای مختلف زمین‌شناسی و کانی‌سازی در منطقه حاصل می‌شوند و برای تهیه نقشه پتانسیل معدنی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۳۹]. این شاخص‌ها مبتنی بر مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متغیرهای اولیه‌اند و داده‌های اولیه بر اساس روش وریمکس<sup>۱</sup> در فضای جدید مورد چرخش قرار گرفته [۴۰ و ۴۱] و در نتیجه شاخص‌های جدید ژئوشیمی با توجه به محورهای ایجاد شده، بدست می‌آیند. برای هر نمونه ژئوشیمیایی یک مقدار مشخصی در هر مولفه اصلی بدست می‌آید این مقادیر به عنوان

دگرسانی سربسیت در بخش شمالی منطقه در میان واحدهای ولکانیکی و توده‌های نفوذی کوارتز پورفیری گسترش دارد. این دگرسانی بر مبنای حضور سربسیت و بقایای پیریت ریزدانه پراکنده مشخص می‌شود. کانی سولفیدی سیستم منحصراً به صورت پیریت مشاهده می‌شود و این کانی اغلب به لیمونیت ثانویه به همراه مقادیری ژاروسیت اکسیده شده است. سیستم‌های رگه‌ای ورقه‌ای، رگه‌ای نازک نیمه موازی در مناطق معینی همراه با اسید فروشویی قوی سنگ‌های اطراف مشاهده می‌شوند. مقادیر کمی مالاکیت در بخش جنوب غرب منطقه مورد مطالعه در داخل شکستگی‌ها و در میان ولکانیک‌های آلتزه همراه با مقادیر ناچیزی بقایای کالکوپیریت دانه‌ریز پراکنده در متن ظاهر شده است [۳۱].

### ۳-۲ روش‌ها

#### ۳-۱-۲ روش چندمتغیره ماهالانوبیس

داده‌های پرت داده‌هایی‌اند که از الگوی کلی اکثر داده‌ها پیروی نمی‌کنند و از مجموعه داده‌ها فاصله دارند. نقاط دورافتاده می‌توانند نرخ خطا را افزایش دهند و در نتیجه روش‌های آماری و پردازش داده‌ها، انحراف قابل توجهی ایجاد کنند [۳۲].

روش فاصله ماهالانوبیس یک روش چندمتغیره است که برای تشخیص داده‌های خارج از ردیف مرسوم است. این شاخص بر اساس ماتریس کوواریانس اندازه‌گیری می‌شود. فاصله ماهالانوبیس به صورت رابطه ۱ محاسبه می‌شود:

$$MD_i = ((x_i - t)^T C^{-1} (x_i - t))^{1/2} \quad (1)$$

که در آن  $x_i$ ،  $t$  و  $C$  به ترتیب نمونه چندمتغیره، مکان چند متغیره تخمین زده شده و ماتریس کوواریانس‌اند. زمانی که داده‌های چندمتغیره به صورت نرمال توزیع شوند، مقادیر تقریباً دارای توزیع کای اسکوئرند. بر اساس توزیع کای اسکوئر می‌توان مقادیر پرت چندمتغیره که مقدار فاصله ماهالانوبیس بالایی دارند را از داده‌های عادی متمایز کرد [۳۳].

یک درصد ثابتی از توزیع کای برای جداسازی نقاط پرت از نقاط عادی استفاده می‌شود. نمونه‌ها با استفاده از مقدار آستانه محاسبه شده با  $\sqrt{\chi_{1-\alpha, v}^2}$  به دو گروه داده‌های پرت و نرمال تقسیم می‌شوند. به طوری که  $v$  درجه آزادی متغیرها و  $\alpha$  سطح معناداری است [۳۴].

#### ۳-۲-۲ روش تحلیل مولفه‌های اصلی

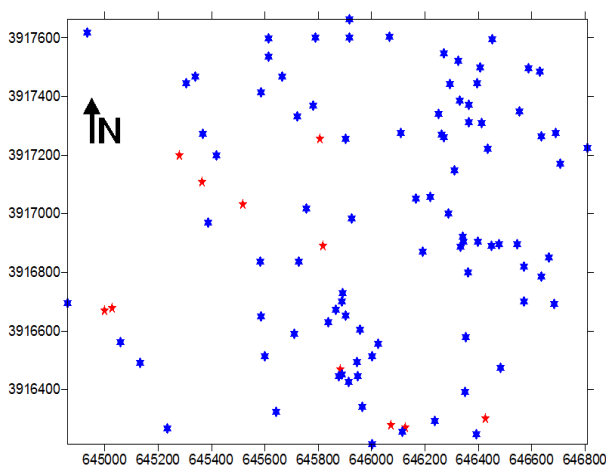
روش تحلیل مولفه‌های اصلی یک روش رایج برای تحلیل

<sup>1</sup> Varimax Rotation Method

آنومالی‌های ژئوشیمیایی را تشدید می‌بخشد.

#### ۴- بحث

منطقه تنورچه یک منطقه دارای رخنمون‌هایی از کانی مس و طلا است که مطالعات ژئوشیمیایی در آن انجام گرفته است. تعداد ۱۰۴ نمونه ژئوشیمیایی برداشت شده از منطقه در این مطالعه مورد تحلیل قرار گرفته است. در این تحقیق نتایج آنالیز ۲۵ عنصر شامل مولیبدن، مس، طلا، سرب، روی، آرسنیک، آنتیموان، نقره و نظایر آن مورد استفاده و مطالعه قرار گرفته است. با استفاده از روش تحلیل مولفه‌های اصلی می‌توان ارتباط بین عناصر و ویژگی‌های عناصر کانی‌سازی را شناسایی کرد و فازهای کانی‌سازی در منطقه را تعیین کرد. این روش بر روی داده‌های ژئوشیمیایی خام و داده‌های ژئوشیمیایی اصلاح شده به کار گرفته و نتایج با یکدیگر مقایسه شد. برای اصلاح داده‌ها با استفاده از روش فاصله ماهالانوبیس داده‌های خارج از ردیف تشخیص داده شده و از مجموعه داده‌ها حذف شد. قبل از استفاده از روش ماهالانوبیس باید داده‌های ژئوشیمیایی عناصر در فاصله صفر و یک استاندارد شوند و سپس فاصله ماهالانوبیس نمونه‌ها محاسبه شود. در ادامه برای تشخیص مقادیر خارج از ردیف از توزیع مربع کای استفاده شد. نمونه‌هایی که فاصله ماهالانوبیس آن‌ها از مقدار  $\sqrt{X^2 d. 0.999}$  در توزیع مربع کای بیشتر است به عنوان نمونه خارج از ردیف در نظر گرفته شد. نمونه‌های لیتوژئوشیمیایی در منطقه به صورت برجای سطحی به تعداد ۹۵ نمونه از سنگ و خاک انجام گرفته است. بر مبنای روش یاد شده، تعداد ۱۱ نمونه به عنوان نمونه خارج از ردیف شناسایی شد. نقشه توزیع نمونه‌های برداشت شده در منطقه همراه با نمونه‌های خارج از ردیف در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲- موقعیت برداشت نمونه‌های ژئوشیمیایی سطحی بر جا در منطقه، نقاط قرمز رنگ نمونه‌های خارج از ردیف‌اند

امتیاز مطلق مولفه‌های اصلی<sup>۱</sup>، می‌توانند به جای غلظت عناصر اولیه مورد تحلیل و بررسی قرار گیرند. در صورتی که فاکتور اصلی کانی‌سازی در بین مولفه‌های اصلی بدست آمده از روش PCA شناسایی شود این مولفه را به عنوان شاخص جدید کانی‌سازی می‌توان در نظر گرفته و مورد تحلیل قرار داد. این شاخص جدید کانی‌سازی مجموعه‌ای از مقادیر APCS را در بر گرفته که بر اساس عیار عناصر پاراژنز کانی‌سازی بدست آمده‌اند و در حقیقت مولفه کانی‌سازی به عنوان یک شاخص جدید چندعنصری مورد توجه قرار می‌گیرد.

PCهای بدست آمده با روش PCA را می‌توان با استفاده از روش‌های فرکتال مدل‌سازی کرد. تعیین بعد فرکتالی اساس این روش‌ها برای تعیین الگوهای ژئوشیمیایی است. اگر یک مدل هموار از توزیع فضایی عناصر توسط نقشه‌های کنتروری ارایه شود، در این نقشه‌ها،  $A(p)$  ناحیه‌ای از کنتور با غلظت  $p$  است. با افزایش غلظت، مساحت کاهش می‌یابد. برای تعریف زمینه و آنومالی ژئوشیمیایی، مدل فرکتال عیار- مساحت به صورت رابطه ۳ تعریف می‌شود [۴۲]:

$$A(p)_{(p>)} \propto p^{-D} \quad (3)$$

که در آن:

$A(p)$ : ناحیه کنتور با غلظت بیشتر از مقدار  $p$ .

$D$ : ویژگی‌های نمایی یا ابعاد فرکتالی.

شبکه‌ای از سلول‌ها را می‌توان بر روی منطقه مورد مطالعه همپوشانی کرد. در این حالت می‌توان با شمارش سلول‌هایی با عیار خام یا مقدار PC عناصر،  $A(p)$  را به دست آورد. در این روش برای غلظت‌های بالاتر از شمارنده مورد نظر،  $A(p)$  برابر است با تعداد سلول‌ها در مساحت سلول‌ها. با توجه به اینکه در بررسی‌های ژئوشیمیایی، آنومالی‌ها غلظت‌های مربوط به فرآیندهای کانی‌سازی را نشان می‌دهند، این مقادیر دارای توابع توان یا ابعاد فرکتالی متفاوت از مقادیر زمینه خواهند بود. این تفاوت در ابعاد فرکتال برای جداسازی نواحی آنومال از زمینه استفاده می‌شود [۳۸، ۴۲-۴۴]. آنومالی‌های ژئوشیمیایی ابعاد فرکتالی بزرگتری نسبت به جوامع زمینه ژئوشیمیایی دارند. بنابراین مرز بین این ابعاد فرکتال را می‌توان مقادیر آستانه در نظر گرفت. مقدار آستانه مقادیر آنومال را از زمینه ژئوشیمیایی جدا می‌کند. مدل‌سازی فرکتال C-A داده‌های PCA، جوامع کانی‌سازی را کلاسه‌بندی کرده و

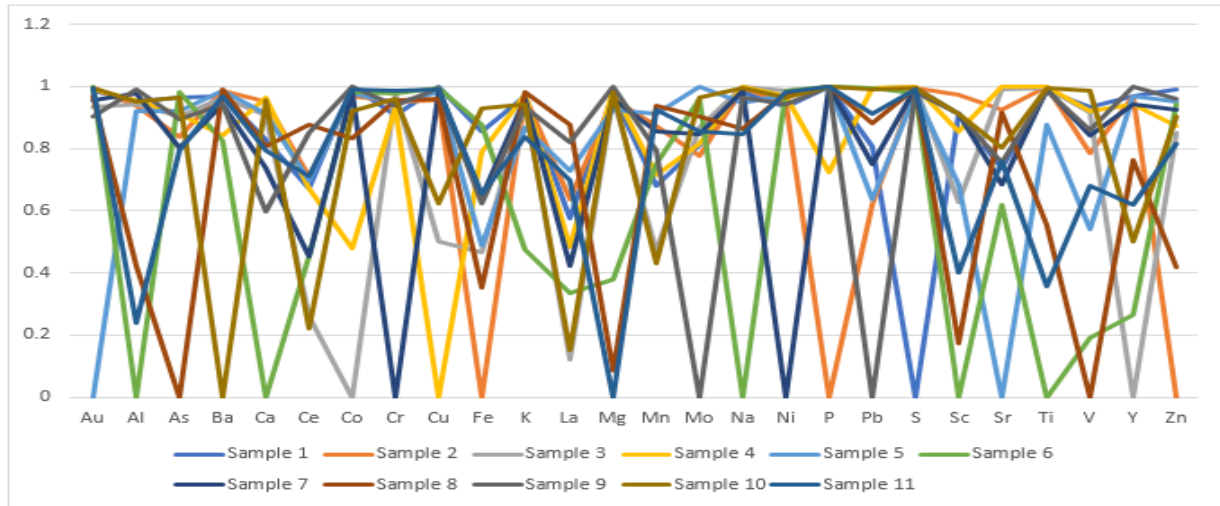
<sup>1</sup> Absolute Principal Component Scores (APCS)

#### ۴-۱- بهبود نتایج با استفاده از اصلاح داده‌های خارج از ردیف

می‌گذارد و نقش تعیین‌کننده‌ای روی خارج از ردیف بودن نمونه‌ها دارد. بنابراین برای بررسی این ویژگی‌ها، مقادیر استاندارد شده نمونه‌های خارج از ردیف برای عناصر مختلف ترسیم شد (شکل ۳). مقادیر استاندارد بر مبنای رابطه ۴ محاسبه شده است.

$$X_{standard} = (X_{max} - X_i) / (X_{max} - X_{min}) \quad (4)$$

برای بررسی رفتار عناصر در نمونه‌های خارج از ردیف، میزان عیار عناصر مختلف در این نمونه‌ها مورد تحلیل قرار گرفت. ماکزیمم یا مینیمم بودن مقادیر عیار عناصر نسبت به عیار سایر نمونه‌ها در آن عنصر روی فاصله ماهالانوبیس تاثیر



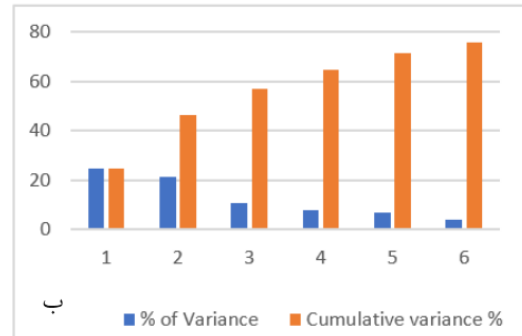
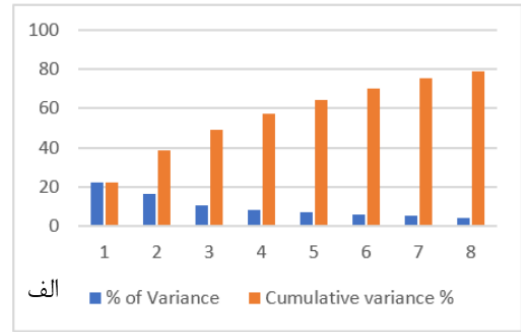
شکل ۳- مقادیر استاندارد (بین صفر و یک) غلظت عناصر برای نمونه‌های خارج از ردیف

تعیین شد. تیپ کانی‌سازی منطقه تنورچه از نوع مس-طلای پورفیری است. مطالعات سیالات درگیر در منطقه نیز این مطلب را نشان می‌دهد [۴۵]. فاکتور کانی‌سازی در روش تحلیل مولفه‌های اصلی بر این اساس انتخاب شده است و مولفه‌ای که عناصر مس و طلا در آن نقش سازنده‌ای ایفا می‌کنند به عنوان مولفه کانی‌سازی مس-طلای پورفیری انتخاب شده است.

روش PCA بر روی مقادیر لگاریتم داده‌های خام منطقه نتوانست به خوبی همراهی عنصر طلا با مس را نشان دهد و علاوه بر این سایر عناصر پارائنز نیز به خوبی شناسایی نشدند. در داده‌های خام، روش PCA، ۲۵ عنصر مورد مطالعه را به ۸ مولفه اصلی کاهش داد. در این حالت مقدار واریانس مربوط به هر مولفه و مقادیر واریانس تجمعی فاکتورهای اصلی بدست آمد و برای مقایسه ترسیم شد (شکل ۴). عنصر مس در مولفه اصلی چهارم قرار دارد و این مولفه به عنوان فاکتور کانی‌سازی شناسایی می‌شود. این مولفه تنها ۸ درصد از واریانس موجود در داده‌ها را توجیه می‌کند. وضعیت عناصر پارائنز در این فاکتور نیز مورد بررسی قرار گرفت.

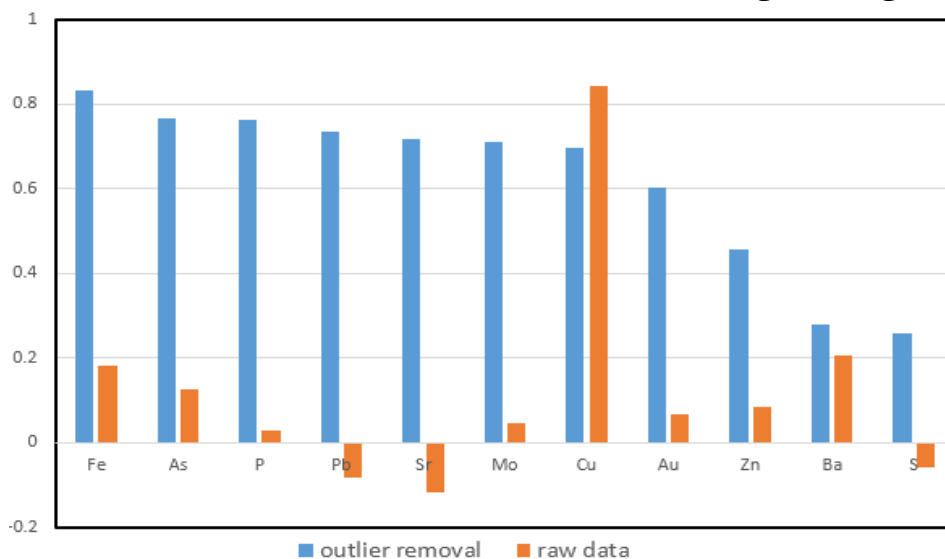
این نمودار نشان می‌دهد که هر کدام از نمونه‌ها در چه عناصری مقدار ماکزیمم و مینیمم را شامل می‌شوند که خود در خارج از ردیف بودن این نمونه‌ها نقش بسزایی داشته است. برخی از نمونه‌ها برای چندین عنصر مقدار استاندارد ۱ را نشان می‌دهند که معادل مقدار ماکزیمم عنصر در منطقه است. اکثر نمونه‌ها متاثر از مقادیر ماکزیمم عناصرند و این عامل اصلی در پرت تشخیص داده شدن آن‌ها بوده است. نمودار نشان می‌دهد نمونه‌های پرت در چندین عنصر دارای عیار ماکزیمم بودند و اصلاح این مقادیر همراه با خطا است. برخی از این نمونه‌ها دارای مقدار صفر در برخی از عناصر نیز است که نشانه مقادیر مینیمم آن عناصر است و در افزایش فاصله ماهالانوبیس تاثیر داشته است. به طور کلی نمودار به خوبی نشان می‌دهد که علت خارج از ردیف بودن نمونه‌ها به عیار چندین عنصر به ویژه مقادیر ماکزیمم بر می‌گردد. از این‌رو حذف این نمونه‌های پرت در مراحل بعدی تحلیل داده‌ها می‌تواند نقش مفیدی برای دستیابی به نتایج واقعی داشته باشد. روش PCA بر روی مقادیر لگاریتمی هر دو مجموعه داده شامل داده‌های خام و داده‌های بدون مقادیر خارج از ردیف به صورت مجزا انجام گرفت و مولفه کانی‌سازی بر مبنای میزان تاثیر عنصر مس در بین سایر مولفه‌های اصلی

عنوان عناصر موثر در کانی‌سازی در نظر گرفت. علاوه بر این با توجه به نتایج حاصل از داده‌های خام، این عناصر پارائز عنصر مس نیستند. همانطور که از این نمودار مشاهده می‌شود روش PCA بر روی داده‌های خام نمی‌تواند روابط بین عناصر را به خوبی تشخیص دهد. بعد از حذف داده‌های خارج از ردیف با استفاده از روش ماهالانوبیس، روش PCA بر روی داده‌های جدید نیز انجام گرفت و نتایج متفاوتی نسبت به داده‌های خام حاصل شد. روش PCA توانست ۲۵ عنصر را در ۶ مولفه اصلی قرار دهد. مقدار واریانس مربوط به هر مولفه در شکل ۴ ترسیم شده است. مولفه اصلی اول به عنوان مولفه کانی‌سازی مس شناخته شده و عنصر مس نقش قابل توجهی در این فاکتور نسبت به سایر مولفه‌ها دارد. این فاکتور ۲۵ درصد از واریانس داده‌ها را توجیه می‌کند که یک افزایش قابل توجهی در مقایسه با فاکتور کانی‌سازی در داده‌های خام، مشاهده می‌شود. در شکل ۵ ضرایب عناصر مختلف در فاکتور کانی‌سازی ترسیم شده است. در این فاکتور ضرایب عناصر نسبت به حالت قبل به شدت افزایش یافته و ارتباط پارائزتیکی عناصر به خوبی تشخیص داده شده است. بر این مبنا عناصر آهن، آرسنیک، فسفر، سرب، استرانسیوم، مولیبدن، مس و طلا در تشکیل مولفه اصلی کانی‌سازی نقش تعیین‌کننده دارند و به عنوان عناصر پارائز شناخته می‌شوند. بعد از حذف داده‌های خارج از ردیف مشخص می‌شود که عنصر طلا و مس در منطقه با یکدیگر ارتباط دارند. شکل ۶ نمودار هیستوگرام فاکتورهای کانی‌سازی مس حاصل از روش PCA را در دو حالت مختلف نشان می‌دهد.

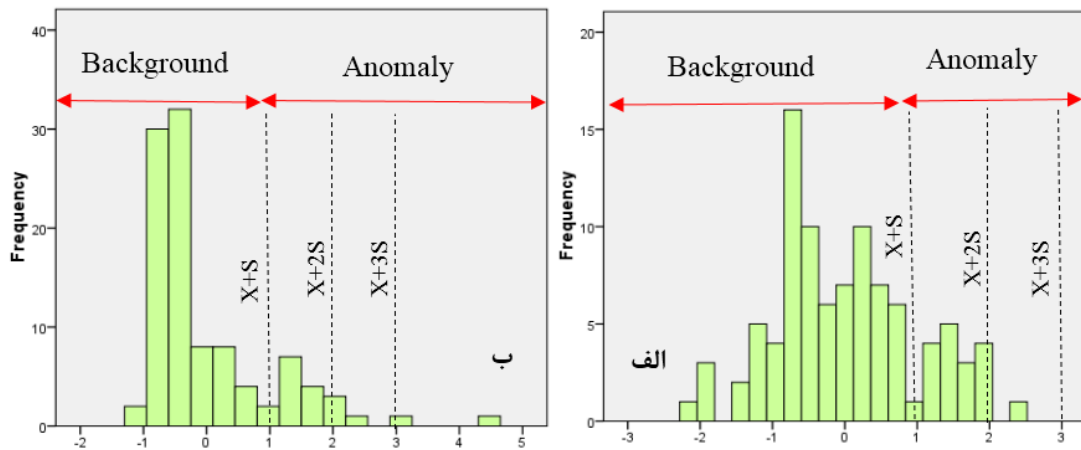


شکل ۴- نمودار مربوط به مقدار واریانس مولفه‌های اصلی در روش PCA (الف: داده‌های خام و ب: داده‌های اصلاح شده)

شکل ۵ نمودار مربوط به ضرایب عناصر کانی‌سازی (بدست آمده از ماتریس rotated components) را در مولفه کانی‌سازی مس نشان می‌دهد. محور قائم در این نمودار مقادیر ضرایب هر عنصر در مولفه کانی‌سازی را نشان می‌دهد. برای تعیین عناصر مهم و موثر در فاکتور کانی‌سازی معمولاً از مقدار حدآستانه‌ای ۰/۵ استفاده می‌شود. بر اساس این معیار در فاکتور کانی‌سازی عنصر مس، عناصر طلا، آرسنیک، آهن، گوگرد، سرب، روی و نظایر آن نقش قابل توجهی ندارند و نمی‌توان این عناصر را به



شکل ۵- نمودار مربوط به مقدار ضرایب عناصر در مولفه اصلی کانی‌سازی مس حاصل از روش PCA (برای داده‌های خام و داده‌های اصلاح شده با روش ماهالانوبیس)



شکل ۶- نمودار هیستوگرام فاکتورهای کانی‌سازی مس حاصل از روش PCA و مقادیر حد آستانه‌ای و جوامع زمینه و آنومالی، (الف) فاکتور کانی‌سازی در داده‌های اصلاح شده با روش ماهالانوبیس، (ب) فاکتور کانی‌سازی در داده‌های خام

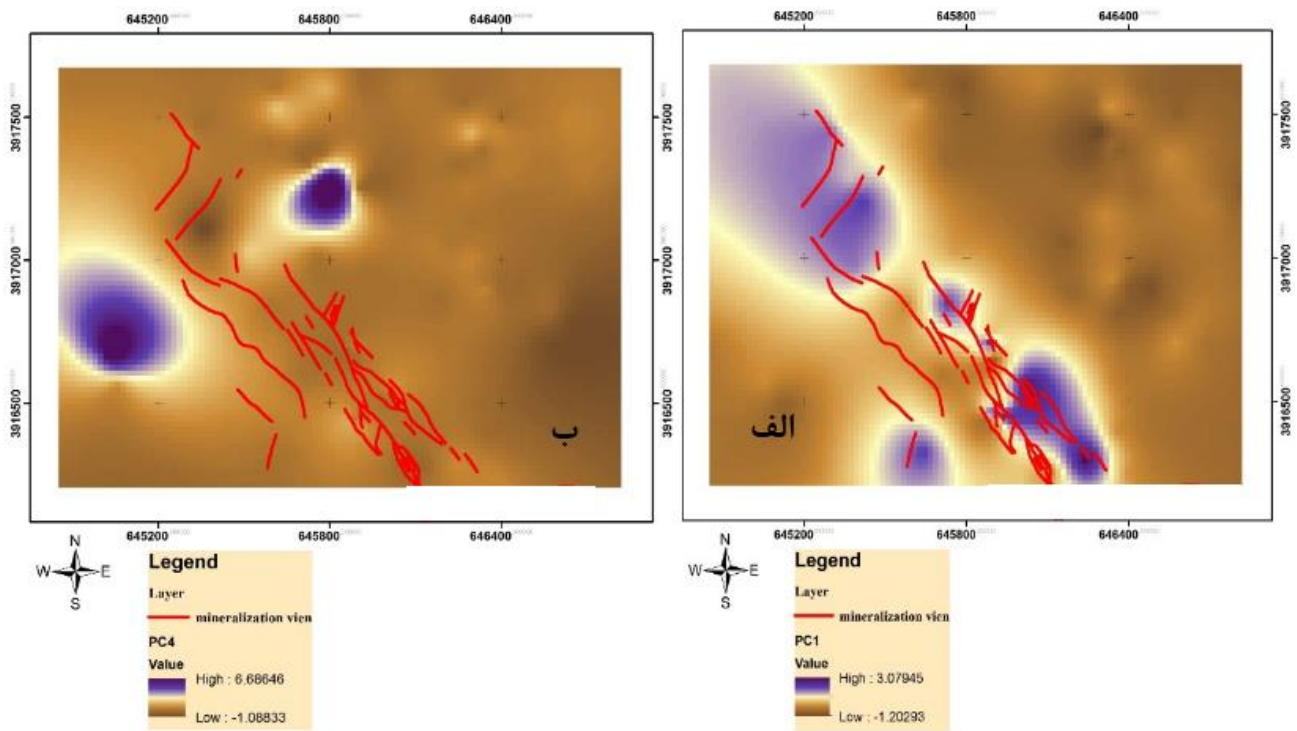
انحراف معیار - میانگین استفاده شده است. در این روش که حد آستانه‌ای‌ها بر اساس ضریبی از انحراف معیار تعریف می‌شوند، جوامع ژئوشیمیایی چند عنصری به ۴ کلاس تقسیم شده است. مقادیر حد آستانه‌ای بر روی هیستوگرام فاکتورهای کانی‌سازی در شکل ۶ نشان داده شده است. مقادیر کمتر از مجموع انحراف معیار و میانگین به عنوان زمینه ژئوشیمیایی در نظر گرفته شده است.

مقادیر بالاتر از این حد آستانه‌ای به عنوان جوامع ژئوشیمیایی تعیین شده که شامل جوامع آنومالی ضعیف، آنومالی متوسط و آنومالی قوی است. مقادیر بین  $x+s$  و  $x+2s$  با عنوان آنومالی ضعیف و مقادیر بین  $x+2s$  و  $x+3s$  آنومالی متوسط است. مقادیر بالاتر از  $x+3s$  نیز به عنوان آنومالی قوی در نظر گرفته شده‌اند.

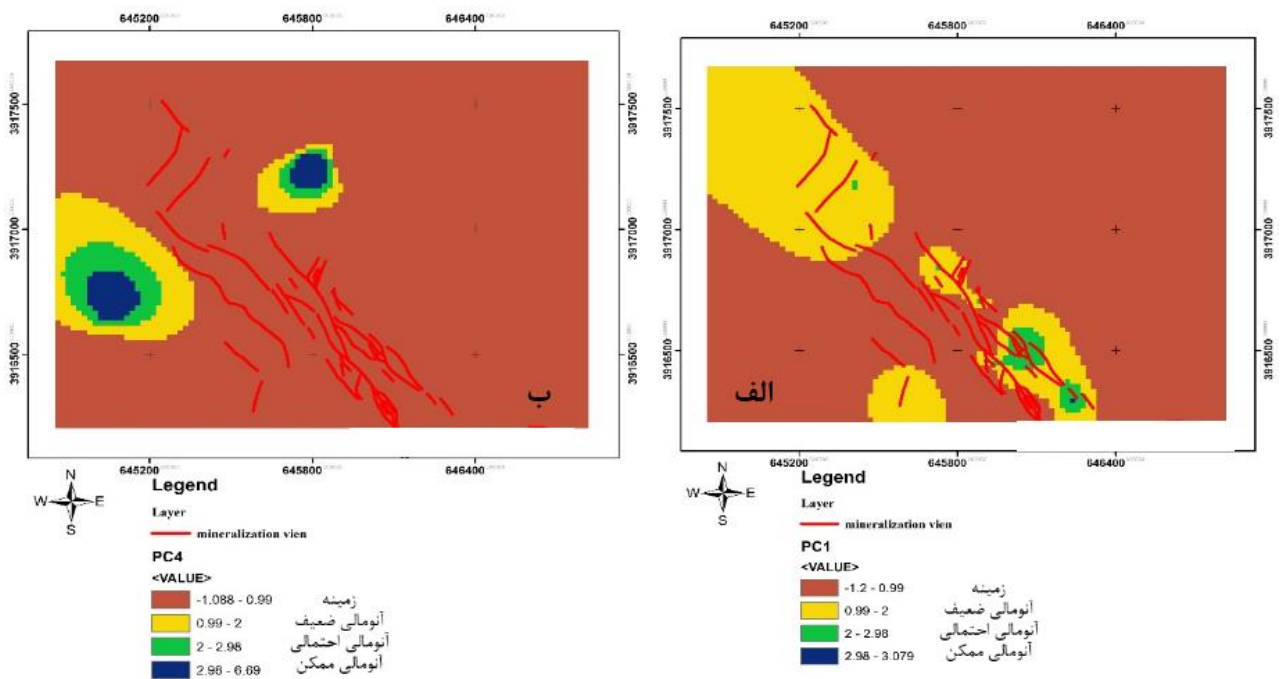
شکل ۸ نقشه جوامع ژئوشیمیایی و مناطق آنومالی مربوط به فاکتور کانی‌سازی حاصل از روش PCA در دو حالت داده‌های خام و داده‌های اصلاح شده را نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل دیده می‌شود هیچ یک از جوامع آنومالی بدست آمده از فاکتور کانی‌سازی در داده‌های خام، با رگه‌های کانی‌سازی انطباق ندارند ولی در فاکتور کانی‌سازی مربوط به داده‌های اصلاح شده از داده‌های پرت، بخشی از رگه‌های کانی‌سازی بر روی جوامع آنومالی قرار می‌گیرد و نتایج این روش را تایید می‌کند. نقشه توزیع جوامع ژئوشیمیایی بدست آمده در این مطالعه به خوبی تاثیر منفی وجود داده‌های پرت بر تحلیل‌های چندمتغیره را نشان می‌دهد. بنابراین با شناسایی و حذف داده‌های خارج از ردیف می‌توان نقشه آنومالی ژئوشیمیایی را بهبود داد.

با توجه به اینکه روش PCA بر روی داده‌های اصلاح شده بعد از حذف مقادیر خارج از ردیف، نتایج مناسب‌تری نشان می‌دهد و عناصر پارائز کانی‌سازی مس به خوبی مشخص می‌شوند، این نتایج را می‌توان به عنوان نتایج بهبود یافته برای تعیین مناطق آنومال مورد استفاده قرار داد. مولفه اصلی کانی‌سازی بر اساس مقادیر عیاری تمام عناصر موثر، تشکیل می‌شود و به عنوان یک شاخص چند عنصری برای تعیین مناطق آنومالی ژئوشیمیایی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. بر این اساس فاکتور کانی‌سازی عنصر مس که تمام عناصر پارائز آهن، آرسنیک، فسفر، سرب، استرانسیوم، مولیبدن، مس و طلا را دربر می‌گیرد با روش درون‌یابی ترسیم شده است. شکل ۷ نقشه توزیع مقادیر فاکتور کانی‌سازی چند عنصری را نشان می‌دهد. مقادیر بالا در این نقشه مربوط به مناطق آنومالی چند عنصری است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود آنومالی ژئوشیمیایی یک روند شمال غربی - جنوب شرقی را نشان می‌دهد که مطالعات اکتشافی تفصیلی‌تر می‌تواند بر روی این آنومالی‌ها متمرکز شود.

روند آنومالی تعیین شده بر روی این شکل با مشاهدات میدانی و رخنمون‌های کانی‌سازی در منطقه انطباق مناسبی دارد. مناطق آنومال بدست آمده از داده‌های اصلاح شده به خوبی روند کانی‌سازی در منطقه را نشان می‌دهند ولی نتایج داده‌های خام نتوانسته است روند کانی‌سازی در منطقه را به خوبی شناسایی کند و انطباق مناسبی نیز با رگه‌های کانی‌سازی نشان نمی‌دهد. در ادامه برای تعیین جوامع ژئوشیمیایی مربوط به فاکتورهای کانی‌سازی چند عنصری که از روش تحلیل مولفه‌های اصلی بدست آمده‌اند از روش آماری



شکل ۷ - نقشه توزیع ژئوشیمیایی فاکتورکانی‌سازی حاصل از روش PCA، (الف) مولفه اصلی اول در داده‌های اصلاح شده با روش ماکس‌انویس، (ب) مولفه اصلی چهارم در داده‌های خام



شکل ۸ - نقشه محدوده آنومالی‌های ژئوشیمیایی مربوط به فاکتورکانی‌سازی حاصل از PCA بر مبنای روش انحراف معیار - میانگین، (الف) مولفه اصلی اول در داده‌های اصلاح شده، (ب) مولفه اصلی چهارم در داده‌های خام

در این مطالعه برای اولین بار ویژگی‌های فرکتالی نتایج روش PCA بعد از حذف مقادیر خارج از ردیف مورد بررسی قرار گرفته و به وسیله روش فرکتالی عیار- مساحت مدل‌سازی شد.

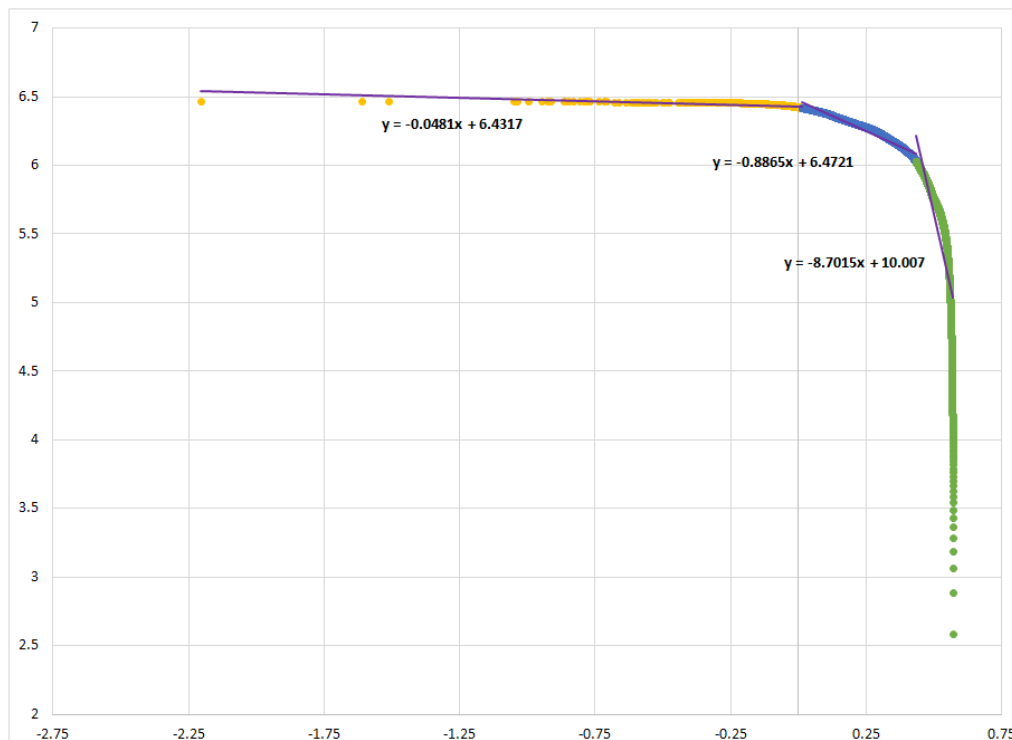
۲-۴- مدل‌سازی فرکتالی داده‌های PCA بعد از حذف داده‌های خارج از ردیف

برای شدت‌بخشی به آنومالی‌های منطقه و کاهش اثر زمینه،

۱۹/۶ مترمربع (با تعداد کل ۷۵۰۰ شبکه) با استفاده از روش کریجینگ معمولی استفاده شد. این روش بر روی مقادیر PCA پیاده‌سازی شد. پس از مرحله تخمین شبکه و طبقه‌بندی داده‌های برآورد شده، نمودار لگاریتمی عیار-مساحت بر روی متغیرها ترسیم شد. در این نمودار، جوامع مختلف با ابعاد فرکتالی متفاوت شناسایی شدند (شکل ۹). سه جمعیت اصلی در نمودار فرکتالی C-A برای داده‌های عامل کانی‌سازی چندمتغیره وجود دارد. ابعاد فرکتالی به طور کلی به طرف جوامع با عیار بالا افزایش می‌یابد. اثرات زمین‌شناسی یا جوامع آنومال با ابعاد فرکتالی بالا شناسایی شد. ابعاد فرکتالی پایین نیز به جوامع زمینه مربوط می‌شود که تحت تاثیر این فعالیت‌ها قرار نگرفته‌اند یا کمتر تحت تاثیر آن‌اند [۳۸، ۷]. ابعاد فرکتالی به دست آمده از جوامع شناسایی شده برای سه جمعیت ۱ تا ۳ به ترتیب ۰٫۰۱۰۵، ۲٫۰۳ و ۱۰٫۲۲ تشخیص داده شد.

با توجه به اینکه مدل فرکتالی برای مقادیر مثبت قابل ترسیم بوده و از روی این مقادیر مقدار حدآستانه محاسبه می‌شود برای همین برای مدل‌سازی مقادیر PCA با روش فرکتال، باید مقادیر منفی PCA به مقدار مثبت تبدیل شوند. بنابراین این مقادیر با افزودن یک عدد مثبت ثابت به مقادیر مثبت تبدیل شدند. موقعیت مکانی نمونه‌های آنومال و زون‌های کانی‌شده با استفاده از این تبدیل تغییری نخواهند شد. مدل‌سازی مقادیر منفی PCA برای تعیین مقادیر آستانه یکی از نوآوری‌های این پژوهش است. ابتدا، روش معمول PCA بر روی داده‌های ژئوشیمیایی با نسبت لگاریتم انجام شد تا ورودی برای مدل‌سازی آماده شود. در مرحله بعد برای تولید داده‌های مثبت، یک عدد ثابت به تمامی امتیازات فاکتور PCA اضافه شده و سپس مقادیر جدید PCA با استفاده از روش فرکتال-C-A مدل‌سازی شد.

برای تخمین عیار و دورن‌یابی داده‌ها یک شبکه ۱۹/۶ ×



شکل ۹- مدل فرکتالی C-A داده‌های PC1

شکل مناطق آنومال با مقدار حدآستانه‌ای ۰٫۹ مشخص و راستای کانی‌سازی نیز در آن نشان داده شده است. همچنین برای مقایسه نتایج و اعتبارسنجی آن، موقعیت رگه‌های کانی‌سازی در منطقه با خطوط قرمز رنگ بر روی این نقشه‌ها آورده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، محل زون‌های

مقادیر حدآستانه بر اساس این مدل اعداد ۰٫۸۱- و ۰٫۹ و بدست آمد. بر این اساس دومین مقدار حدآستانه مناطق آنومال معرفی شد. نتایج حاصل با این روش تلفیقی، در قالب دو نقشه توزیع عیارهای ژئوشیمیایی در شکل (۱۰-الف) و مناطق آنومال ژئوشیمیایی در شکل (۱۰-ب) آورده شده است. در این

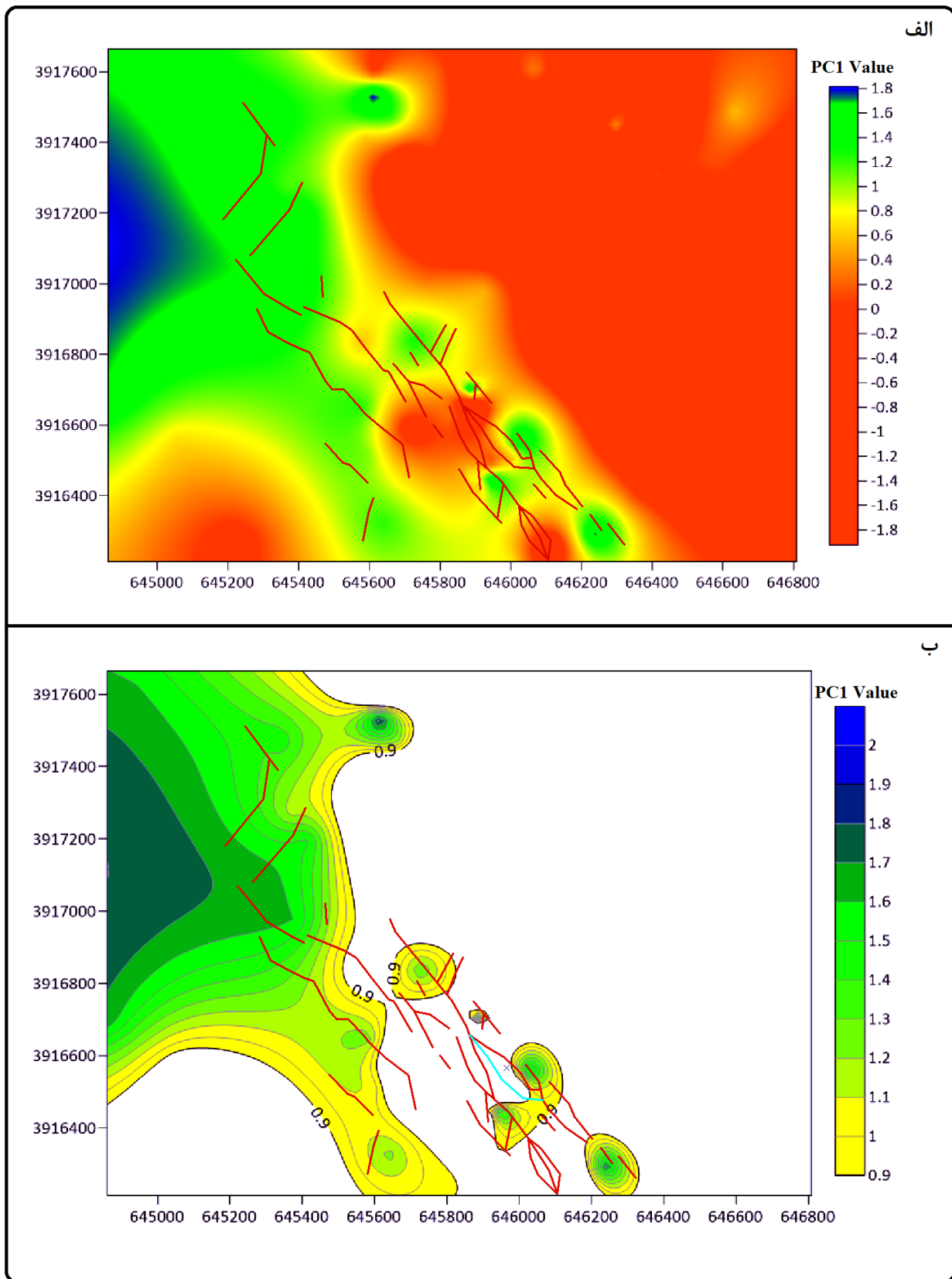
فرکتالی C-A مولفه کانی‌سازی حاصل به خوبی توانسته است مناطق آنومال را بهبود بخشد.

#### ۵- نتیجه‌گیری

نتایج بدست آمده از این پژوهش در زیر آورده شده است:

- روش PCA بر روی داده‌های خام ژئوشیمیایی نتوانست به خوبی عناصر پارائز مس در فرآیند کانی‌سازی را شناسایی کند و مولفه اصلی ۴ به عنوان فاکتور کانی‌سازی مس انتخاب شد. عنصر طلا در این فاکتور با عنصر مس همراهی ندارد.
- با استفاده از روش ماهالانویس تعداد ۱۱ نمونه ژئوشیمیایی به عنوان نمونه‌های خارج از ردیف شناسایی و از مجموعه داده‌ها حذف شد. روش PCA بر روی داده‌های اصلاح شده نتایج مناسبی را ارائه داد. در این حالت عناصر آهن، آرسنیک، فسفر، سرب، استرانسیوم، مولیبدن، مس و طلا در مولفه اصلی اول قرار گرفته و به عنوان عناصر پارائز تعیین شدند.
- با استفاده از روش آماری انحراف معیار- میانگین، نقشه جوامع ژئوشیمیایی (زمینه، آنومالی ضعیف، آنومالی متوسط و آنومالی قوی) برای فاکتورهای کانی‌سازی در هر دو حالت داده خام و داده اصلاح شده، بدست آمد. جوامع آنومالی حاصل از داده‌های خام هیچ‌گونه انطباقی با رگه‌های کانی‌سازی نشان نداد. در حالی که در حالت داده‌های اصلاح شده، بخشی از رگه‌های معدنی بر روی مناطق آنومال قرار گرفت و نقشه مناطق آنومال تا حدودی بهبود داده شد.
- با پیاده‌سازی مدل فرکتالی عیار- مساحت بر روی داده‌های مولفه اصلی و توسعه روش تلفیقی، روند کانی‌سازی در منطقه (شمال غربی- جنوب شرقی) با دقت بیشتری تشخیص داده شد و مناطق آنومال بدست آمده با مشاهدات میدانی منطقه و اطلاعات زمین‌شناسی تطابق بسیار مناسبی نشان داد.
- به نظر می‌رسد نتایج بررسی‌های چندعنصری با روش PCA، ورودی واقعی‌تری را برای مدل‌سازی داده‌ها با روش فرکتالی عیار- مساحت فراهم می‌کند. همچنین توانایی روش فرکتالی در جداسازی دقیق جوامع کانی‌سازی باعث شده قابلیت پیش‌بینی اکتشافی در روش تلفیقی جدید به مراتب بالا برود.

کانی‌سازی بدست آمده از روش تلفیقی مدل‌سازی فرکتالی داده‌های PCA با روند کانی‌سازی در منطقه تطابق زیادی دارد. این روند کانی‌سازی در غرب منطقه مورد مطالعه در راستای شمال غربی- جنوب شرقی معرفی شده بود که با روش جدید با دقت بسیار زیادی مجزا شده است (شکل ۱۰- الف). همچنین مناطق آنومال معرفی شده در شکل (۱۰- ب) نیز این تطابق را با دقت بیشتری نسبت به روش PCA تایید می‌کند. این موارد با اطلاعات زمین‌شناسی منطقه نیز نشان می‌دهد که آلتراسیون به وسیله ساختار گسلی اصلی با روند شمال غرب- جنوب شرق کنترل می‌شود. کانی‌سازی تیپ پورفیری در استوک نفوذی و سنگ‌های اطراف آن به صورت پیریتی شدن ظاهر شده است. مهم‌ترین توده نفوذی تفریق یافته و ظاهر شده، استوک‌های کوارتز پورفیری است. این توده نفوذی شامل کوارتزهای چشمی گرد و درشت، بیوتیت آلتره شده همراه با فلدسپات در یک خمیره سیلیسی ریزدانه است. همچنین در این نفوذی‌ها آثار و بقایایی از ذرات پیریت پراکنده مشاهده می‌شود. همراهی معنادار عناصر طلا و مس در روش تحلیل مولفه‌های اصلی و ویژگی‌های آلتراسیونی و زمین‌شناسی منطقه، وجود کانی‌سازی تیپ مس- طلای پورفیری در این منطقه را تقویت می‌کند. نتایج نشان می‌دهد ارتباط نزدیکی بین آنومالی‌های ژئوشیمیایی و ویژگی‌های زمین‌شناسی وجود دارد. برش‌های هیدروترمالی و رگچه‌های پر شده با سیلیس مرحله تاخیری و باکس‌ورک‌های درشت اکسید آهن ثانویه ناشی از تخریب سولفیدهای اولیه آهن در بخش آنومالی دیده می‌شود. همچنین در مناطق آنومال کانی‌سازی طلای نوع رگه‌ای و استوک ورک وجود دارد. مناطق آنومالی شناسایی شده بر روی آلتراسیون‌های سیلیسی، سربستی و آرژلیکی قرار گرفته است. جنس سنگ‌ها در این بخش شامل لاپیلی‌توف، ریوداسیت، ریولیت است. در برخی از قسمت‌ها نفوذی‌های کوارتز مونزونیت پورفیری حاوی بیوتیت و هورنبلند مشاهده می‌شود. ارتباط بین آنومالی‌های ژئوشیمیایی و آلتراسیون‌های منطقه به صورت محاسباتی نیز تایید شده است [۴۶]. به نظر می‌رسد نتایج بررسی‌های چندعنصری با روش PCA، ورودی واقعی‌تری را برای مدل‌سازی داده‌ها با روش فرکتالی عیار- مساحت فراهم می‌کند. در نتیجه قابلیت پیش‌بینی اکتشافی در روش تلفیقی جدید به مراتب بالا رفته است. با توجه به اینکه روش PCA به خوبی توانست عناصر پارائز کانی‌سازی را شناسایی کند و یک شاخص چندمتغیره از این پارائزها را ارائه نماید، مدل‌سازی



شکل ۱۰- الف) نقشه توزیع ژئوشیمیایی حاصل از مدل سازی فرکتالی عیار- مساحت داده های PCA در کلاس PC1، ب) مناطق آنومال ژئوشیمیایی بدست آمده از مدل سازی فرکتالی عیار- مساحت داده های PCA

## منابع

- anomalies associated with Cu and Pb-Zn skarn mineralization using principal component analysis and spectrum-area fractal the Gangdese Belt, Tibet (China)". *J. Geochemical Exploration*, 111, 13-22.
- Shahi H, Ghavami R, Kamkar Rouhani K, Asadi-Haroni H.; 2014; "Identification of mineralization features and deep geochemical anomalies using a new FT-PCA approach", *journal of Geopersia*, 4 (2), 101-110.
  - Zuo, Renguang, and Jian Wang. "Fractal/multifractal modeling of geochemical data: A review." *Journal of Geochemical Exploration* 164 (2016): 33-41.
  - Mahdiyanfar, Hossein. "A Critique on Power Spectrum–Area Fractal Method for Geochemical Anomaly Mapping." *Journal of Analytical and Numerical Methods in Mining Engineering* 10, no. 25 (2020): 33-41.
  - Pirdadeh Beyranvand, D., Arian, M. A., Farhadinejad, T., & Ashja Ardalan, A. (2021). Identification of Geochemical Distribution of REEs Using Factor Analysis and Concentration-Number (CN) Fractal Modeling in Granitoids, South of Varcheh 1: 100000 Sheet, Central Iran. *Iranian Journal of Earth Sciences*, 13(4), 288-289.
  - Safari, M., Babaei, A. H., Daya, A. A., & Manouchehriniya, M. (2022). Separating geochemical anomalies by concentration-area, concentration-perimeter and concentration-number fractal models in Qaen region, East of Iran. *Iranian Journal of Earth Sciences*, 14(4), 271-284.
  - Hosseini, S. A., Khah, N. K. F., Kianoush, P., Afzal, P., Ebrahimabadi, A., & Shirinabadi, R. (2023). Integration of fractal modeling and correspondence analysis reconnaissance for geochemically high-potential promising areas, NE Iran. *Results in Geochemistry*, 11, 100026.
  - Paravarzar, S., Mokhtari, Z., Afzal, P., & Aliyari, F. (2023). Application of an approximate geostatistical simulation algorithm to delineate the gold mineralized zones characterized by fractal methodology. *Journal of African Earth Sciences*, 200, 104865.
  - Pourgholam, Mohammad Mahdi, Peyman Afzal, Amir BijanYasrebi, Mehran Gholinejad, and Andrew Wetherelt. "Detection of geochemical anomalies using a fractal-wavelet model in Ipack area, Central Iran." *Journal of Geochemical Exploration* 220 (2021): 106675.
  - Cheng, Qiuming, F. P. Agterberg, and S. B. Ballantyne. "The separation of geochemical anomalies from background by fractal methods." *Journal of Geochemical exploration* 51, no. 2 (1994): 109-130.
  - Seyedrahimi-Niaraq, M., & Hekmatnejad, A. (2021). The efficiency and accuracy of probability diagram, spatial statistic and fractal methods in the
  - Seyedrahimi-Niaraq, M., Mahdiyanfar, H., Mokhtari, A. R.; 2022; "Integrating principal component analysis and U-statistics for mapping polluted areas in mining districts". *Journal of Geochemical Exploration*, 234, 106924.
  - Salomão, G. N., Dall'Agnol, R., Angelica, R. S., Sahoo, P. K., & Wang, X.; 2021; "Geochemical mapping in stream sediments of the Carajás Mineral Province, part 2: Multi-element geochemical signatures using Compositional Data Analysis (CoDA)", *Journal of South American Earth Sciences*, 110, 103361.
  - Farzadian, M., Mahdiyanfar, H., & Rouhani, A. K.; 2022; "Evidential belief functions modeling of geophysical and multi-element geochemical data for Pb-Zn mineral potential targeting", *Journal of African Earth Sciences*, 104606.
  - Seyedrahimi-Niaraq, M., Mahdiyanfar, H.; 2021; "Introducing a new approach of geochemical anomaly intensity index (GAI) for increasing the probability of exploration of shear zone gold mineralization", *Geochemistry*, 81(4), 125830.
  - Jolliffe, I.T.;2002; "Principal Component Analysis", 2nd edn. Springer, New York, 547 NY.487 pp.
  - Shahi, H.; 2017; "Prediction of dispersed mineralization zone in depth using frequency domain of surface geochemical data", *Journal of Mining and Environment*, 8(3), 433-446.
  - Shahi, H., Ghavami, R., Rouhani, A. K., Kahoo, A. R., Haroni, H. A.; 2015; "Application of Fourier and wavelet approaches for identification of geochemical anomalies", *Journal of African Earth Sciences*, 106, 118-128.
  - Cheng, Q., Bonham-Carter, G., Wang, W., Zhang, S., Li, W., Xia, Q.; 2011; "A spatially weighted principal component analysis for multi-element geochemical data for mapping locations of felsic intrusions in the Gejiu mineral district of Yunnan, China", *Computer and Geoscience.*, 37, 662–669.
  - Kamani, M.M., Haddadpour, F., Forsati, R. and Mahdavi, M.; 2022; "Efficient fair principal component analysis". *Machine Learning*, pp.1-32.
  - Farzadian, M., Rouhani, A. K., Yarmohammadi, A., Shahi, H., Sabokbar, H. F., & Ziaie, M.; 2016; "A weighted fuzzy aggregation GIS model in the integration of geophysical data with geochemical and geological data for Pb-Zn exploration in Takab area, NW Iran", *Arabian Journal of Geosciences*, 9(2), 104.
  - Davis, J.C.; 2002; "Statistics and Data Analysis in Geology", 3rd ed., John Wiley & Sons Inc., NewYork, 550 pp.
  - Zuo, R.; 2011; "Identifying geochemical

35. Kim, J.O., Kim, J.H., Seung Ju, K., Hyun Mi, O. and Park, E.H.; 2022; "Exploratory Factor Analysis using Maximum Likelihood Estimation (MLE) and Oblique Rotation (Direct Oblimin) on Multicultural Experiences of University Students: Focusing on Principal Component Analysis (PCA) and Varimax Comparison". *IJBASA*, 4(1), pp.12-18.
36. Zeng, M.; 2021; "Estimating Latent Factor Models in Matrices and Tensors via Spectral Methods and the Varimax Rotation". The University of Wisconsin-Madison.
37. Acal, C., Aguilera, A.M. and Escabias, M.; 2020; "New modeling approaches based on varimax rotation of functional principal components", *Mathematics*, 8(11), p.2085.
38. Seyedrahimi-Niaraq, M. and Mahdianfar, H.; 2022; "Improvement of geochemical prospectivity mapping using power spectrum-area fractal modeling of multi-element mineralization factor (SAF-MF)". *Geochemistry: Exploration, Environment, Analysis*, pp.geochem2022-015.
39. Eilu, P., Groves, D., 2001, Primary alteration and geochemical dispersion haloes of Archaean orogenic gold deposits in the Yilgarn Craton: the pre-weathering scenario. *Geochemistry: Exploration, Environment, Analysis*, 1: 183-200.
40. Kaiser, H. F. (1958). The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika* 23, 187–200. doi: 10.1007/BF02289233.
41. Acal, C., Aguilera, A.M., and Escabias, M. (2020). New modeling approaches based on varimax rotation of functional principal components. *Mathematics*, 8(11), p. 2085.
42. Cheng, Q., Agterberg, F.P., and Ballantyne, S.B. (1994). The separation of geochemical anomalies from background by fractal methods. *Journal of Geochemical Exploration*, 51, 109–130.
43. Yousefi, M. and Carranza, E.J.M. (2015). Prediction-area (P-A) plot and C-A fractal analysis to classify and evaluate evidential maps for mineral prospectivity modeling. *Computers & Geosciences*, 79: 69-81.
44. Madani, N. and Sadeghi, B. (2019). Capturing Hidden Geochemical Anomalies in Scarce Data by Fractal Analysis and Stochastic Modeling. *Natural Resources Research*, 28: 833-847.
45. Bagherzadeh, N. A., Alirezaei, S., Jafarirad, A., & Afzal, P. (2021). Study of Petrogenesis, Modeling And Involved Fluids in Igneous Rocks in The area of Tanurjeh Deposit. *Revista Georaguaia*, 11(02), 49-74.
46. Mahdianfar, H., Mohammadpoor, M. and Mahdavi, M., 2022. Determination of alteration genesis and quantitative relationship between alteration and geochemical anomaly using support vector machines. *International Journal of Mining and Geo-Engineering*, 56(1), pp.33-39.
- identification of shear zone gold mineralization: a case study of the Saqqez gold ore district, NW Iran. *Acta Geochimica*, 40, 78-88.
۲۳. سیدرحیمی نیارق، میرمهدی؛ مهدیان فر، حسین؛ مختاری، احمدرضا؛ ۱۴۰۲؛ «به کارگیری روش های ساختاری ژئوشیمیایی فرکتال و آماره U جهت تعیین مناطق آلوده به عنصر سرب مرتبط با فعالیت های معدنی در منطقه ایرانکوه». *نشریه روش های تحلیلی و عددی در مهندسی معدن*، ۱۳(۳۴)، ۴۱-۵۵.
۲۴. مهدیان فر، حسین؛ سیدرحیمی نیارق، میرمهدی؛ ۱۴۰۰؛ «مدل سازی فرکتالی طیف توان- مساحت داده های حاصل از تحلیل طیفی آماره فضایی U جهت جداسازی مناطق آنومال ژئوشیمیایی مس پورفیری». *نشریه مهندسی معدن*، ۱۶(۵۰)، ۵۹-۷۲.
25. Mahdianfar, H., & Seyedrahimi-Niaraq, M. (2023). Integration of Fractal and Multivariate Principal Component Models for Separating Pb-Zn Mineral Contaminated Areas. *Journal of Mining and Environment*, 14(3), 1019-1035.
۲۶. کیانیپوریان، صادق؛ اسدی هارونی، هوشنگ؛ افشاری، سهراب؛ فرهنگیان، مهران؛ ۱۳۹۳؛ «جداسازی داده های خارج از رده به روش تک متغیره و چندمتغیره در داده های ژئوشیمی محدوده طلای اپی ترمال ساری گونای». *نشریه مهندسی معدن*، ۹(۲۵)، ۸۵-۹۶.
27. Han, J., Kamber, M., Pei, J.; 2012; "Data Mining: Concepts and Techniques", Morgan Kaufmann, 740 p.
28. Ranga Suri, N.N.R., Murty, N., Athithan, G.; 2019; "Outlier Detection: Techniques and Applications: A Data Mining Perspective", Springer International Publishing, 216 p.
29. Aggarwal, C. C.; 2016; "Outlier analysis", Second Edition. Springer, New York, 54p.
30. Ahn, J., Lee, M.H., Lee, J.A.; 2019; "Distance-based outlier detection for high dimension, low sample size data", *Journal of Applied Statistics*, 2019, 46, 13-29.
31. Karimpour M.; 2004; "geological report of Tanurcheh mineralization area", Zarmehr Company.
32. Begashaw, G. B. and Yohannes, Y. B.; 2020; "Review of outlier detection and identifying using robust regression model", *Int. J. Syst. Sci. Appl. Math.* 5: 4–11.
33. Filzmoser, P., Reimann, C. and Garrett, R. G. A.; 2004; "multivariate outlier detection method".
34. Hassan, S., Byun, H. and Kim, J.; 2021; "Iterative Smoothing and Outlier Detection for Underwater Navigation". *arXiv preprint arXiv:2109.14220*.