

بررسی عوامل مؤثر بر همگرایی روش هاردی کراس در تحلیل شبکه‌های تهویه معادن

سجاد افرائی^۱، سیدحسن مدنی^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی معدن و متالورژی

۲- استادیار دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، hmadani@aut.ac.ir

(دریافت ۲۵ دی ۱۳۹۰، پذیرش ۲۸ آبان ۱۳۹۱)

چکیده

تجزیه و تحلیل شبکه‌های تهویه یکی از مهم‌ترین مراحل تهویه معادن به شمار می‌رود. روش هاردی کراس یکی از قدیمی‌ترین و از جمله متداول‌ترین روش‌های تحلیل شبکه‌های تهویه است. این روش یک روش حل تکراری است و طی آن تکرار معادلات آن قدر ادامه می‌یابد تا خطا به حد ناچیز برسد. آهنگ تقارب این روش در وهله اول به مقادیر فرضی اولیه شدت جریان شاخه‌ها و انتخاب صحیح حلقه‌ها بستگی دارد. به علاوه عوامل دیگری نیز بر همگرایی و سرعت آن تأثیرگذار هستند که این مقاله به بررسی و اثبات آن‌ها می‌پردازد. نخست آنکه در صورتی که شدت جریان شاخه‌ای پس از جمع جبری با خطای حلقه‌های مربوط به آن منفی شود، جهت جریان در شاخه یادشده تغییر نکند و دیگر آن که شدت جریان شاخه یادشده در محاسبه خطای حلقه‌ها در تکرار بعد، با علامت جبری خود در مخرج رابطه هاردی کراس در نظر گرفته شود. در ادامه یک شبکه فرضی مورد تحلیل قرار گرفته و برای اعتبارسنجی نتایج از روش نیوتن-رفسون استفاده شد. نتایج حاصل از رویکرد اثبات‌شده بر پاسخ حاصل از روش نیوتن-رفسون انطباق دارد.

کلمات کلیدی

تحلیل شبکه، روش هاردی کراس، تقارب پاسخ

۱- مقدمه

که در آن ΔP_i افت فشار شاخه، R_i مقاومت شاخه و Q_i شدت جریان عبوری از شاخه است.

ب- در مورد هر گره رابطه زیر را می‌توان نوشت:

$$\sum Q_i = 0 \quad (2)$$

ج- سرانجام در مورد حلقه‌ها رابطه زیر وجود دارد:

$$\sum R_i Q_i^2 = 0 \quad (3)$$

حداقل تعداد حلقه‌های لازم برای تعدیل شبکه از رابطه ۴ به دست می‌آید [۱]:

$$n = n_b - n_n + 1 \quad (4)$$

که در آن n حداقل تعداد حلقه‌ها، n_b تعداد شاخه‌ها و n_n تعداد گره‌ها است. حلقه‌ها را باید به گونه‌ای انتخاب کرد که هر یک از شاخه‌های شبکه لاقط در یک حلقه شرکت داشته باشد.

مجموعه معادلات ۱ تا ۳ سیستم معادلات تحلیل شبکه‌ها را تشکیل می‌دهند که در حالت کلی حل آنها با روش‌های معمولی امکان‌پذیر نیست و باید از روش‌های تقریبی از جمله روش هاردی کراس کمک گرفت [۲]. روش هاردی کراس یکی از متداول‌ترین روش‌های تقریبی و زیربنای بسیاری از برنامه‌های کامپیوتری است. این روش دو زیرروش تعدیل شدت جریان و تعدیل فشار داشته و آنچه در عمل به کار می‌رود، معمولاً زیرروش اول است [۱]. در بررسی حاضر هوا را تراکم‌ناپذیر و خشک فرض می‌کنیم و تبادل گرما را نیز نادیده می‌گیریم.

روش هاردی کراس یک روش حل تکراری است و طی آن روابط به دفعات حل می‌شوند و این تکرار آن قدر ادامه می‌یابد تا خطا به حد ناچیزی برسد. در این روش فرض می‌شود که هر یک از حلقه‌ها تنها تابع یک متغیرند. رابطه عمومی روش به صورت زیر است [۱]:

$$\Delta Q = - \frac{\sum \Delta P}{2 \sum RQ} \quad (5)$$

که در آن $\sum \Delta P$ جمع جبری افت فشار شاخه‌های حلقه است. افت فشار شاخه‌هایی که حرکت هوا در آنها در جهت مثبت حلقه است مثبت و افت فشار شاخه‌های با جهت عکس، منفی در نظر گرفته می‌شود. در این رابطه $\sum RQ$ مجموع حاصل ضرب مقاومت در شدت جریان شاخه‌ها بدون در نظر

شبکه تهویه، بیان ریاضی سیستم تهویه واقعی معدن و در واقع مجموعه‌ای از مسیرهای مختلف هوا در معدن و اطلاعات همراه با آن است. شبکه‌های تهویه معدن از تعدادی حلقه تشکیل شده است که هر حلقه تعدادی شاخه دارد. نقاط اتصال شاخه‌ها به یکدیگر گره نامیده می‌شود. مقصود از تحلیل شبکه‌ها آن است که با معلوم بودن شدت جریان کلی Q که وارد شبکه می‌شود، مجهولات زیر به دست آید [۱]:

- شدت جریان هوا در تمام شاخه‌ها
- جهت صحیح جریان هوا در شاخه‌ها
- مقاومت کلی شبکه
- افت فشار کلی شبکه

برای تحلیل شبکه‌های تهویه، تاکنون روش‌های مختلفی ارائه شده است که روش هاردی کراس از جمله قدیمی‌ترین آن‌ها است که اولین بار طی مقاله ای در سال ۱۹۳۶ ارائه شد [۲]. اگرچه این روش در اصل برای تحلیل شبکه‌های توزیع آب ارائه شده بود اما بعدها محققین آن را برای تحلیل شبکه‌های تهویه به کار بردند که از جمله می‌توان به تحقیقات وانگ اشاره کرد [۳]. علاوه بر روش هاردی کراس روش‌های تحلیلی دیگری نیز بدین منظور ارائه شده است که روش نیوتن-رفسون (با دو زیرروش معادلات ΔQ و H) و روش تئوری خطی از جمله مهم‌ترین آن‌ها است که ابتدا در پایان نامه ملکی [۱] مطرح شد و جزئیات روش طی دو مقاله انتشار یافت [۴]. در این زمینه تحقیقات دیگری نیز انجام گرفته است که می‌توان به تحقیقات کیم و موتمانسکی اشاره کرد [۶]. در این مقاله نحوه استفاده از روش هاردی کراس تشریح شده است. از آنجا که در بعضی موارد به هنگام تکرار معادلات، فرایند همگرا نمی‌شود و یا دیر به همگرایی می‌رسد بنابراین هدف اصلی از این مقاله بررسی عواملی است که بر همگرایی تأثیر می‌گذارند.

۲- مبانی روش هاردی کراس

برای تعیین مجهولات شبکه تهویه می‌توان مجموعه معادلاتی را به شرح زیر نوشت [۴، ۱]:

الف- در مورد هر یک از شاخه‌ها رابطه زیر صادق است:

$$\Delta P_i = R_i Q_i^2 \quad (1)$$

گرفتن جهت مثبت یا منفی حرکت هوا در آنها است. این رابطه در مورد حلقه‌های حاوی بادبزن به صورت رابطه ۶ خواهد بود.

$$\Delta Q = -\frac{\sum \Delta P}{2 \sum RQ - S} \quad (6)$$

که در آن S شیب منحنی مشخصه بادبزن در حوالی نقطه عملکرد است که ممکن است مثبت یا منفی باشد.

۳- حل مسائل با روش هاردی کراس

مراحل تحلیل شبکه‌ها با استفاده از روش هاردی کراس عبارت است از [۱]:

الف- برای شدت جریان شاخه‌ها مقادیر فرضی به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که جمع جبری شدت جریان گره‌ها صفر شود. هر چه حدس اولیه به واقعیت نزدیک‌تر باشد محاسبات زودتر به نتیجه خواهد رسید.

ب- افت فشار شاخه‌هایی که حرکت هوا در آنها در جهت مثبت حلقه است مثبت و افت فشار شاخه‌های با جهت عکس، منفی در نظر گرفته می‌شود و براساس رابطه ذکرشده خطای شدت جریان هر حلقه در هر مرحله محاسبه می‌شود.

ج- اگر بعضی از شاخه‌ها در چند حلقه شرکت کنند، خطای مربوط به این شاخه‌ها از جمع جبری خطای حلقه‌هایی که در آنها شرکت دارند بدست می‌آید.

د- با جمع جبری شدت جریان فرضی اولیه با خطای حلقه‌ها، شدت جریان جدیدی برای شاخه‌ها به دست می‌آید. از مبانی روش آن است که حتی اگر شدت جریان در یک شاخه منفی شود، جهت جریان تغییر داده نشود.

ه- مراحل را آن قدر تکرار می‌کنیم تا خطای تمام حلقه‌ها از حد مجاز مورد نظر کمتر شود.

۴- عوامل موثر بر همگرایی روش

آهنگ تقارب روش هاردی کراس نه تنها به مقادیر فرضی اولیه شدت جریان شاخه‌ها بستگی دارد بلکه به انتخاب درست حلقه‌ها نیز وابسته است [۱]. در این بین دو نکته مهم دیگر نیز دخالت دارند که موضوع این مقاله است و عدم رعایت آنها منجر به واگرایی و عدم تقارب پاسخ خواهد شد. نخست آنکه در صورتی که شدت جریان شاخه‌ای پس از جمع جبری شدت جریان اولیه با خطای حلقه‌ها در هر تکرار منفی شود،

$$\sum RQ = R_1(Q_1) + R_2(Q_2) + R_3(Q_3) + \dots + R_n(Q_n) \quad (7)$$

که در آن شدت جریان هر شاخه با علامت جبری خود وارد محاسبات می‌شود.

از آنجا که جمع جبری افت فشار شاخه‌های هر حلقه باید برابر صفر شود بنابراین اگر R_m مقاومت شاخه‌ها، Q_m شدت جریان فرضی شاخه‌ها، Q'_m شدت جریان واقعی شاخه‌ها و n تعداد شاخه‌های حلقه باشند، مطابق رابطه ۳ خواهیم داشت:

$$\sum_{m=1}^n R_m Q_m'^2 = 0$$

اگر k تعداد شاخه‌هایی از حلقه که جهت جریان آنها موافق با جهت قراردادی حلقه است، l تعداد شاخه‌هایی از حلقه که جهت جریان آنها مخالف با جهت قراردادی حلقه است، Q_i شدت جریان شاخه‌هایی که در آنها جهت جریان موافق با جهت قراردادی حلقه است، Q_j شدت جریان شاخه‌هایی که در آنها جهت جریان مخالف با جهت قراردادی حلقه است و ΔQ جمع جبری خطای شدت جریان حلقه‌هایی که شاخه در آنها شرکت دارد باشد، خواهیم داشت:

$$n = k + l \rightarrow \sum_{i=1}^k R_i Q_i^2 - \sum_{j=1}^l R_j Q_j^2 = 0 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^k R_i (Q_i + \Delta Q)^2 - \sum_{j=1}^l R_j (Q_j - \Delta Q)^2 = 0 \quad (9)$$

با صرف نظر از بینهایت کوچک‌های مرتبه بالاتر از یک خواهیم داشت:

عبارت قبل از آن شده است. اگر رابطه ۱۴ با استفاده از سری تیلور بسط داده شده و از بینهایت کوچک‌های مرتبه بالاتر از یک صرف نظر شود، خواهیم داشت [۱]، [۳]:

$$f_K(Q_K + \Delta Q_K) = f_K(Q_K) + \Delta Q_K f'_K(Q_K) \quad (۱۶)$$

با فرض $f_K(Q_K + \Delta Q_K) = 0$ و حل آن نسبت به Q_K خواهیم داشت:

$$\Delta Q_K = -\frac{f_K(Q_K)}{f'_K(Q_K)} \quad (۱۷)$$

اگر افزایش فشار ناشی از بادبزن نصب‌شده در شاخه j ثابت باشد، مشتق آن صفر است و رابطه ۱۷ به شکل زیر در می‌آید [۳ و ۱]:

$$\Delta Q_K = -\frac{\sum_{j=1}^{n_b} b_{Kj}(R_j|Q_j|Q_j - P_{Nj} - P_{Fj})}{2 \sum_{i=1}^{n_b} b_{Kj}^2 R_j |Q_j|} \quad (۱۸)$$

طبق نظر وانگ باید قدرمطلق مقدار شدت جریان شاخه‌ها در مخرج رابطه ۱۸ لحاظ شود. از نظر نویسندگان این مقاله سه ایراد به نظریه وانگ (رابطه ۱۸) وارد است:

الف- مشتق رابطه ۱۴ به صورت $2 \sum_{i=1}^{n_b} b_{Kj}^2 R_j |Q_j|$ محاسبه شده است، در صورتی که b_{Kj} ضریب بوده و به همان شکل به صورت ضریب ثابت در محاسبه مشتق وارد می‌شود. شکل صحیح‌تر رابطه ۱۸ به صورت زیر است:

$$\Delta Q_K = -\frac{\sum_{j=1}^{n_b} b_{Kj}(R_j|Q_j|Q_j - P_{Nj} - P_{Fj})}{2 \sum_{i=1}^{n_b} b_{Kj} R_j |Q_j|} \quad (۱۹)$$

ب- با توجه به آنکه در روش هاردی کراس در ابتدا جهت و مقدار فرضی برای جریان هوا در شاخه‌ها در نظر گرفته می‌شود و تا انتهای محاسبات جهت شاخه‌ها تغییر نمی‌کند، حتی اگر مقدار Q_j منفی باشد Q_j^2 و در نتیجه $R_j Q_j^2$ مثبت خواهد بود. از این رو مقدار P_j با توجه به موافق یا مخالف بودن جهت جریان با جهت حلقه به ترتیب مثبت یا منفی خواهد بود. اما رابطه ۱۳ با توجه به تعریف ریاضی تابع قدر مطلق به صورت زیر در خواهد آمد:

$$|Q_j| = \begin{cases} -Q_j & Q_j < 0 \\ Q_j & Q_j \geq 0 \end{cases} \quad (۲۰)$$

$$P = \begin{cases} -R_j Q_j^2 & Q_j < 0 \\ R_j Q_j^2 & Q_j \geq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^k R_i(Q_i^2 + 2Q_i \Delta Q) - \sum_{j=1}^l R_j(Q_j^2 - 2Q_j \Delta Q) = 0 \quad (۱۰)$$

$$\sum_{i=1}^k R_i Q_i^2 + 2\Delta Q \sum_{i=1}^k R_i Q_i - \sum_{j=1}^l R_j Q_j^2 + 2\Delta Q \sum_{j=1}^l R_j Q_j = 0 \quad (۱۱)$$

$$\Delta Q = -\frac{\sum_{i=1}^k R_i Q_i^2 - \sum_{j=1}^l R_j Q_j^2}{2 \sum_{i=1}^k R_i Q_i + 2 \sum_{j=1}^l R_j Q_j}$$

$$= -\frac{\sum_{i=1}^k R_i Q_i^2 - \sum_{j=1}^l R_j Q_j^2}{2 \sum_{m=1}^n R_m Q_m} \quad (۱۲)$$

مطابق نظر وانگ رابطه زیر را می‌توان نوشت [۳ و ۱]:

$$\Delta P_j = R_j |Q_j| Q_j \quad (۱۳)$$

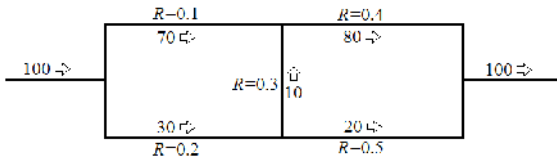
علت استفاده از قدرمطلق Q_j در رابطه ۱۳ حفظ علامت جبری P در مواردی است که Q_j منفی باشد. علامت جبری مقاومت R_j صرف نظر از جهت جریان هوا در شاخه همواره مثبت است. مطابق نظریه وانگ جمع جبری افت فشارها در حلقه K خواهد شد [۱]، [۳]:

$$f_K(Q_K) = \sum_{j=1}^{n_b} b_{Kj}(R_j|Q_j|Q_j - P_{Nj} - P_{Fj}) \neq 0 \quad K=1,2,\dots,m \quad (۱۴)$$

که در آن f_K معادله حلقه K که تنها تابع Q_K فرض می‌شود، n_b تعداد شاخه‌ها، b_{Kj} عناصر ماتریس بنیادی حلقه، R_j مقاومت شاخه j ، Q_j شدت جریان فرضی شاخه j ، P_{Nj} افزایش فشار ناشی از تهویه طبیعی در شاخه j ، P_{Fj} افزایش ناشی از بادبزن نصب‌شده در شاخه j و m تعداد حلقه‌های بنیادی خواهد بود. تعداد حلقه‌های بنیادی از طریق رابطه ۴ محاسبه خواهد شد. ماتریس بنیادی حلقه نمایش‌دهنده حلقه‌های بنیادی یک شبکه است. اگر شاخه j در حلقه K شرکت داشته و جهت آن موافق جهت حلقه باشد $b_{Kj} = 1$ و در حالتی جهت آن مخالف جهت حلقه باشد $b_{Kj} = -1$ است. اگر شاخه j در حلقه K شرکت نداشته باشد $b_{Kj} = 0$ خواهد بود. اگر $Q_K + \Delta Q_K$ شدت جریان اصلاح شده تکرار بعد باشد، خواهیم داشت:

$$Q_K + \Delta Q_K = Q_K \quad (۱۵)$$

در این رابطه Q_K تصحیح مربوط به معادله یا حلقه K است و فلش نیز نشان‌گر آن است که عبارت بعد از فلش جایگزین



شکل ۱: شبکه تهویه فرضی

تقارب پاسخ را با سه رویکرد بررسی می‌کنیم:

الف- در صورتی که شدت جریان یک شاخه منفی شود، در مخرج رابطه شدت جریان با علامت منفی لحاظ شده اما جهت جریان تغییر نکند. این حالت همان حالتی است که منجر به دستیابی به پاسخ صحیح می‌شود. در جدول ۱ خطای شدت جریان حلقه‌ها و در جدول ۲ شدت جریان شاخه‌ها بر اساس این رویکرد محاسبه و درج شده است.

ب- در صورتی که شدت جریان یک شاخه منفی شود، در مخرج رابطه شدت جریان با علامت مثبت لحاظ شده اما جهت جریان تغییر نکند. در جداول ۳ و ۴ خطای حلقه‌ها و شدت جریان شاخه‌ها بر اساس این رویکرد محاسبه و درج شده است.

ج- در صورتی که شدت جریان یک شاخه منفی شود، در مخرج رابطه شدت جریان با علامت مثبت لحاظ شده و جهت جریان تغییر کند. نتایج حاصل از این رویکرد در جدول ۵ درج شده‌اند.

برای اعتبارسنجی نتایج، شبکه مورد نظر با استفاده از معادلات ΔQ در روش نیوتن-رفسون مورد تحلیل قرار گرفت. روش نیوتن-رفسون از دیگر روش‌های تقریبی حل معادلات است و برای تحلیل شبکه‌های تهویه نیز به صورتی گسترده و در قالب معادلات ΔQ و H به کار می‌رود [۱]، [۴]. بر اساس این روش، برای هر حلقه باید تابع جمع جبری اختلاف فشار شاخه‌ها را تشکیل داد. پس از مشتق‌گیری ضمنی و تشکیل ماتریس مشتقات ضمنی می‌توان خطای شدت جریان حلقه‌ها در تکرار بعد را از طریق رابطه ۲۳ محاسبه کرد [۱]:

$$\overline{\Delta Q}^{(n+1)} = \overline{\Delta Q}^{(n)} - \overline{D}^{-1} \overline{f} \quad (23)$$

که در آن $\overline{\Delta Q}^{(n)}$ و $\overline{\Delta Q}^{(n+1)}$ بردارهای اختلاف شدت جریان شاخه‌ها در حلقه‌ها در تکرار (n) و $(n+1)$ ام، \overline{D}^{-1}

به عبارت دیگر طبق رابطه ۲۰ هنگامی که Q_j منفی باشد مقدار P_j در صورتی که جهت جریان موافق حلقه باشد منفی و هنگامی که جهت جریان شاخه مخالف جهت حلقه باشد مثبت است. این مطلب با آنچه که پیش از این بیان شد در تناقض است. به عبارت دیگر اگر حلقه‌ای با n_b شاخه دارای a شاخه با شدت جریان مثبت و b شاخه با شدت جریان منفی باشد به طوری که $n_b = a + b$ باشد و با فرض آنکه یا هیچ یک از شاخه‌های حلقه افزایش فشار ناشی از بادبزن یا تهویه طبیعی وجود نداشته باشد، خواهیم داشت:

$$f_K(Q_K) = \sum_{h=1}^{n_b} b_{Kh} R_h Q_h^2 = \sum_{i=1}^a b_{Ki} R_i Q_i^2 + \sum_{j=1}^b (-b_{Kj} R_j Q_j^2) \quad (21)$$

نتیجه رابطه ۲۱ با توجه به مقادیر b_{Kj} که به ترتیب ۱ برای موافق بودن جهت جریان با جهت حلقه، -۱ برای مخالف بودن جهت جریان با جهت حلقه و صفر برای عدم حضور شاخه در حلقه است، مغایر با نتایج روابط ۸ و ۹ خواهد بود.

ج- از طرف دیگر مشتق رابطه ۲۱ برابر است با:

$$f'_K(Q_K) = \sum_{i=1}^a 2b_{Ki} R_i Q_i + \sum_{j=1}^b (-2b_{Kj} R_j Q_j) = 2 \sum_{i=1}^a b_{Ki} R_i Q_i - 2 \sum_{j=1}^b b_{Kj} R_j Q_j \quad (22)$$

به طور مشابه، با توجه به مقادیر b_{Kj} ، این رابطه مغایر با مخرج روابط ۵ و ۱۲ است.

با توجه به موارد یادشده ثابت می‌شود که شدت جریان شاخه‌ها باید با علامت جبری خود در مخرج رابطه ۵ لحاظ شوند. به منظور تشریح این ادعا طی مثالی یک شبکه فرضی مورد تحلیل قرار گرفته و مقادیر به‌دست آمده با نتیجه حاصل از روش نیوتن-رفسون مقایسه شده است.

۵- ارائه مثال

شبکه تهویه شکل ۱ را که مرکب از تعدادی حفاریات افقی معدنی است در نظر می‌گیریم و شدت جریان شاخه‌ها را با استفاده از روش هاردی کراس محاسبه می‌کنیم. مقاومت شاخه‌ها برحسب کیلومورگ و نیز تخمین اولیه شدت جریان شاخه‌ها برحسب مترمکعب در ثانیه در شکل مشخص شده است.

حلقه‌ها، عدم تغییر جهت جریان و در نظر گرفتن شدت جریان شاخه‌ها با علامت جبری آن‌ها در محاسبه خطای حلقه‌ها بر همگرایی روش تأثیرگذار هستند. در نظر نگرفتن این نکات سبب واگرایی و یا همگرایی کند روش هاردی کراس خواهد شد. سه اشکال به رابطه ارائه شده توسط وانگ برای تحلیل شبکه‌ها با روش هاردی کراس و استفاده از قدر مطلق شدت جریان شاخه‌ها وارد است، از این رو هنگامی که حدس اولیه شدت جریان شاخه‌ها به گونه‌ای است که ممکن است شدت جریان شاخه‌ها در تکرارهای بعدی منفی بدست آید، استفاده از رابطه وانگ سبب واگرایی یا دیر به پاسخ رسیدن خواهد شد.

معکوس ماتریس مشتقات ضمنی و f بردار توابع جمع جبری اختلاف فشارحلقه‌ها است [۱]. در جدول ۶ خطای شدت جریان حلقه‌ها در ۵ تکرار درج شده و شدت جریان شاخه‌ها پس از ۵ تکرار در جدول ۷ آمده است. به طوری که دیده می‌شود پاسخ روش نیوتن-رفسون با نتایج رویکرد الف مطابقت دارد.

۶- نتیجه گیری

تحلیل شبکه‌های تهویه معادن با روش‌های دستی مشکل و گاه غیرممکن است، بنابراین به‌اجبار باید از روش‌های تقریبی حل معادلات از جمله روش هاردی کراس استفاده کرد. علاوه بر مقادیر فرضی اولیه شدت جریان شاخه‌ها و انتخاب صحیح

جدول ۱: خطای شدت جریان حلقه‌ها بر اساس رویکرد الف

خطا	تکرار اول	تکرار دوم	تکرار سوم	تکرار چهارم	تکرار پنجم
$Q_1 (m^3/s)$	-۸/۷۵	-۲/۴۵۲۲	۰/۲۲۷۹	-۰/۰۱۹۲	۰/۰۰۱۷۲۴
$Q_2 (m^3/s)$	-۲۶/۵۵۵۶	-۰/۹۱۰۹	۰/۱۲۶۶	-۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۰۸۵۱۵

جدول ۲: شدت جریان شاخه‌ها بر اساس رویکرد الف

تکرار	$Q_{AB} (m^3/s)$	$Q_{AC} (m^3/s)$	$Q_{BC} (m^3/s)$	$Q_{BD} (m^3/s)$	$Q_{CD} (m^3/s)$
اول	۶۱/۲۵	۳۸/۷۵	-۷/۸۰۵۶	۵۳/۴۴۴۴	۴۶/۵۵۵۶
دوم	۵۸/۷۹۷۸	۴۱/۲۰۲۲	-۶/۲۶۴۳	۵۲/۵۲۳۵	۴۷/۴۶۶۵
سوم	۵۹/۰۲۵۷	۴۰/۹۷۴۳	-۶/۳۶۵۶	۵۲/۶۶۰۱	۴۷/۳۳۹۹
چهارم	۵۹/۰۰۶۵	۴۰/۹۹۳۵	-۶/۳۵۶۴	۵۲/۶۵۰۱	۴۷/۳۴۹۹
پنجم	۵۹/۰۰۸۲۲۴	۴۰/۹۹۱۷۷۶	-۶/۳۵۷۲۷۲۵	۵۲/۶۵۰۹۵۱۵	۴۷/۳۴۹۰۴۸۵

جدول ۳: خطای شدت جریان حلقه‌ها بر اساس رویکرد ب

خطا	تکرار اول	تکرار دوم	تکرار سوم	تکرار چهارم	تکرار پنجم
$Q_1 (m^3/s)$	-۸/۷۵	-۱/۷۴۴۰۵	-۰/۳۷۰۳	-۰/۰۹۴۰۳	-۰/۰۲۴۷۷
$Q_2 (m^3/s)$	-۲۶/۵۵۵۶	-۰/۸۲۰۱۳	۰/۰۰۳۱۷	۰/۰۱۶۲۱	۰/۰۰۵۲۵

جدول ۴: شدت جریان شاخه‌ها بر اساس رویکرد ب

تکرار	$Q_{AB} (m^3/s)$	$Q_{AC} (m^3/s)$	$Q_{BC} (m^3/s)$	$Q_{BD} (m^3/s)$	$Q_{CD} (m^3/s)$
اول	۶۱/۲۵	۳۸/۷۵	-۷/۸۰۵۶	۵۳/۴۴۴۴	۴۶/۵۵۵۶
دوم	۵۹/۵۰۵۹۵	۴۰/۴۹۴۰۵	-۶/۸۸۱۶۸	۵۲/۶۲۴۲۷	۴۷/۳۷۵۷۳
سوم	۵۹/۱۳۵۶۵	۴۰/۸۶۴۳۵	-۶/۵۰۸۲۱	۵۲/۶۲۷۴۴	۴۷/۳۷۲۵۶
چهارم	۵۹/۰۴۱۶۲	۴۰/۹۵۸۳۸	-۶/۳۹۷۹۷	۵۲/۶۴۳۶۵	۴۷/۳۵۶۳۵
پنجم	۵۹/۰۱۶۸۵	۴۰/۹۸۳۱۵	-۶/۳۶۷۹۵	۵۲/۶۴۸۹	۴۷/۳۵۱۱

جدول ۵: شدت جریان شاخه‌ها بر اساس رویکرد ج

$Q_{CD} (m^3/s)$	$Q_{BD} (m^3/s)$	$Q_{BC} (m^3/s)$	$Q_{AC} (m^3/s)$	$Q_{AB} (m^3/s)$	تکرار
۴۶/۵۵۵۶	۵۳/۴۴۴۴	+۷/۸۰۵۶	۳۸/۷۵	۶۱/۲۵	اول
۴۶/۹۸۶۸۱	۵۳/۰۱۳۱۹	۵/۳۶۵۶۱	۴۱/۶۲۱۲	۵۸/۳۷۸۸	دوم
۴۷/۱۱۲۵۱	۵۲/۸۸۷۴۹	۵/۳۹۶۸۱	۴۱/۷۱۵۷	۵۸/۲۸۴۳	سوم

جدول ۶: خطای شدت جریان حلقه‌ها پس از ۵ تکرار بر اساس روش نیوتن-رفسون

تکرار	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$Q_1 (m^3/s)$	۰	-۱۳/۹۰۲۹۵	-۱۱/۱۱۳۲	-۱۰/۹۹۲۴	-۱۰/۹۹۲۰۷	-۱۰/۹۹۲۰۷
$Q_2 (m^3/s)$	۰	-۲۷/۴۸۲۴۲	-۲۷/۳۱۹۷	-۲۷/۳۴۹۰	-۲۷/۳۴۹۱۲	-۲۷/۳۴۹۱۲

جدول ۷: شدت جریان شاخه‌ها پس از ۵ تکرار بر اساس روش نیوتن-رفسون

شدت جریان شاخه	$Q_{AB} (m^3/s)$	$Q_{AC} (m^3/s)$	$Q_{BC} (m^3/s)$	$Q_{BD} (m^3/s)$	$Q_{CD} (m^3/s)$
مقدار	۵۹/۰۰۷۹۳	۴۰/۹۹۲۰۷	-۶/۳۵۷۰۵	۵۲/۶۵۰۸۸	۴۷/۳۴۹۱۲

منابع

- [1] Madani, H.; (2002); "Mine Ventilation" Vol.2, published by Amirkabir University of technology
- [2] Cross, H.; (1936); "Analysis of flow in networks of conduits or conductors"; university of Illinois, Engineering experiment station, bulletin no.286
- [3] Hartman, H.L Mutmansky, J.M Wang, Y.J; (1992); "Mine ventilation and air conditioning" John Wiley & Sons Publication
- [4] Madani, H. Maleki, B.; (2008); "Mine ventilation network analysis based on H equations in the Newton-Raphson method" Iranian Journal of Mining Engineering, Vol.3, No.5, pp.71-77
- [5] Madani, H. Maleki, B.; (2007); "Mine ventilation network analysis using Newton-Raphson method based on DQ equations" Amirkabir Journal of Science and Technology, Vol.66, pp.97-102
- [6] Kim, J.H Mutmansky, J.M; (1991); "A summary of experimental findings on solution methods for mine ventilation networks" Proceeding of 5th US mine ventilation symposium