

## یادداشت فنی

### تحلیل مکانیک شکست نمونه‌های دیسکی ترک‌دار با استفاده از روش المان مرزی

محمود بهنیا<sup>۱\*</sup>؛ سید حسین میرزینلی یزدی<sup>۲</sup>

۱- دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده مهندسی معدن behnia@cc.iut.ac.ir

۲- دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی آمایش و پدافند غیر عامل M\_Yazdi@mut.ac.ir

(دریافت ۱۲ مرداد ۱۳۹۴، پذیرش ۳۱ فروردین ۱۳۹۵)

#### چکیده

شکست سازه های سنگی و گسترش ترک در آنها اغلب تحت مد ترکیبی رخ می‌دهد. از این رو تعیین پارامترهای مکانیک شکست مصالح سنگی در حالت مد ترکیبی (چقرمگی مد I و II)، به‌عنوان معیاری برای شروع و گسترش ترک بسیار ضروری است. نمونه‌هایی با هندسه مختلف برای اندازه-گیری پارامترهای بیان‌شده استفاده شده است. ولی نمونه دیسکی با یک ترک مرکزی (CSCBD) به دلیل در دسترس بودن مغزه‌های حفاری و همچنین سهولت آماده‌سازی، توسط محققین مختلف بیشتر استفاده شده است. در این مطالعه یک برنامه عددی (2DFPM) بر مبنای روش المان مرزی (ناپیوستگی-جابجایی) (Displacement Discontinuity) که قابلیت بسیار مناسبی در مدل‌سازی توسعه ترک دارد، توسعه داده شده و نحوه گسترش ترک در نمونه‌های دیسکی دارای ترک مرکزی در هندسه‌های مختلف ترک بررسی شد. برای افزایش دقت محاسبات از المان‌های مرتبه بالا (Higher Order Elements) برای مدل‌سازی مرز ترک و محیط اطراف آن و المان نوک ترک استفاده شده است. به‌منظور اعتبارسنجی برنامه عددی توسعه داده شده در مدل‌سازی فرایند رشد ترک و استخراج پارامترهای مکانیک شکست تعدادی از مسائل دارای حل تحلیلی و عددی با استفاده از برنامه عددی، مدل‌سازی شد و نتایج آن با نتایج ارائه شده توسط دیگر محققین مقایسه شد. مطالعه عددی گسترش ترک در نمونه‌های دیسکی نشان داد که زاویه قرارگیری ترک مرکزی نسبت به امتداد بارگذاری و همچنین طول ترک بر میزان بازشدگی، تنش‌های کششی و فشاری و فاکتور شدت تنش ایجاد می‌کند. نوک ترک تأثیر داشته و این عوامل تعیین‌کننده مسیر گسترش شکستگی در نمونه دیسکی می‌باشند.

#### کلمات کلیدی

گسترش ترک، مد ترکیبی (I-II)، نمونه CSCBD، روش ناپیوستگی-جابجایی

## ۱- مقدمه

مکانیک شکست بر اساس این فرض واقع بینانه که تمام اجسام دارای نقص‌های شبیه ترک هستند و این نواقص دلیل شروع شکست در جسم هستند، بنا شده است. این نواقص که اغلب به-عنوان ترک مدل می‌شوند، می‌توانند به صورت حفره یا نواقص غیر خطی دیگر وجود داشته باشند. در توده سنگ دربرگیرنده سازه‌های سنگی نیز به دلیل وجود عوارض ساختاری همانند درزه‌ها، حفرات، شکستگی‌ها و گسل‌ها مفاهیم مکانیک شکست صادق بوده و بنابراین پایداری و مقاومت آن در برابر بارهای استاتیکی و دینامیکی اعمالی می‌بایست با استفاده از مفهوم مکانیک شکست ارزیابی شود. مهم‌ترین کارکرد مکانیک شکست سنگ توانایی آن در برقراری ارتباط میان مقاومت شکست سنگ با هندسه ترک یا ترک‌های موجود و همچنین چقرمگی شکست (مقاومت سنگ در برابر گسترش ترک) است. با توجه به این که مهم‌ترین عامل گسیختگی در مصالح سنگی که رفتار ترد دارند، توسعه ترک است بنابراین محاسبه چقرمگی شکست برای درک چگونگی رفتار سازه‌های سنگی بسیار با اهمیت است. لازم به ذکر است که مکانیک شکست در حل بسیاری از مسائل مهندسی سنگ همانند انفجار، شکست هیدرولیکی، حفاری، پایداری سازه‌های زیرزمینی و روباز و غیره کاربرد دارد. نتایج مطالعات نشان می‌دهد که توسعه ترک در سازه‌ها و مصالح سنگی به دلیل ماهیت ترد بودن آن‌ها و همچنین نحوه بارگذاری‌های موجود در آن، در امتداد صفحه ترک صورت گرفته و بنابراین گسترش ترک در حالت مدهای ترکیبی<sup>۱</sup> انجام خواهد شد. بررسی‌ها نشان می‌دهد که اغلب تحقیقات انجام شده در حوضه مکانیک شکست سنگ اغلب روی حالت ساده بارگذاری یعنی مد I متمرکز بوده است. هر چند مد شکست II و مد ترکیبی I-II اخیراً دارای توجهاتی بوده ولی هنوز داده‌های چقرمگی شکست برای این حالت‌های بارگذاری نسبتاً کمیاب می‌باشند. با توجه به این که شکست سازه‌های سنگی اغلب در حالت مد II و یا مد ترکیبی I-II انجام می‌شود بنابراین ضروری است که مطالعه گسترش ترک تحت این بارگذاری‌ها صورت پذیرد.

یکی از روش‌های بررسی پایداری سازه‌های سنگی به وسیله مفهوم مکانیک شکست استفاده از روش‌های عددی است. در میان روش‌های عددی، روش المان مرزی<sup>۲</sup> در حل مسائلی که در

آن‌ها نسبت سطح به حجم کوچک است و تنش‌ها به سرعت تغییر می‌کنند کارآمدتر است. بنابراین این روش قدرتمند عددی به طور گسترده در مکانیک شکست استفاده شده است [۱،۲]. در این روش به دلیل کاهش یک بعد مسئله و عدم نیاز به المان-بندی سطح و تنها با المان‌بندی مرزها و سطح ترک، میزان داده‌ها و زمان محاسبات نسبت به روش المان محدود<sup>۳</sup> به شدت کاهش می‌یابد. روش ناپیوستگی-جابجایی<sup>۴</sup> (DDM) که یک روش المان مرزی غیرمستقیم<sup>۵</sup> است برای مدل‌سازی مسائل گسترش ترک در مکانیک شکست سنگ استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که در روش ناپیوستگی-جابجایی مشکلات مربوط به مش بندی مجدد مسئله وجود ندارد.

اخیراً روش جابجایی-ناپیوستگی با المان مرتبه بالا<sup>۶</sup> به همراه المان نوک ترک برای حل مسائل مربوط به گسترش ترک استفاده شده است [۹-۲]. در المان‌های مرتبه بالا با برهم‌گذاری نقاط مرکزی زیر-المان‌ها<sup>۷</sup> (هر المان مرتبه بالا می‌تواند به دو، سه و یا چهار زیر-المان تقسیم شود) دقت محاسبات افزایش می‌یابد. همچنین مشکل یکتایی<sup>۸</sup> در نوک ترک نیز با استفاده از المان نوک ترک برطرف می‌شود.

در این مطالعه روش المان مرزی مرتبه بالا به همراه المان نوک ترک به منظور بررسی گسترش ترک در نمونه‌های سنگی دیسکی شکل که ترک میانی دارند استفاده شده است. ترک میانی با زوایای مختلف و همچنین طول‌های مختلف مطالعه شده است. فاکتور شدت تنش در نوک ترک میانی و همچنین تنش‌های کششی ایجاد شده در اطراف آن برای ارزیابی روند گسترش ترک و پیش‌بینی مسیر آن در حالت‌های مختلف محاسبه شدند. میزان بازشدگی و لغزش ترک در حالت‌های مختلف و تأثیر آن بر چگونگی توسعه ترک دیگر پارامتر مورد مطالعه بوده است. لازم به ذکر است که کلیه مدل‌سازی‌ها در حالت دو بعدی، کرنش صفحه‌ای و با فرض الاستیسیته خطی انجام شده است.

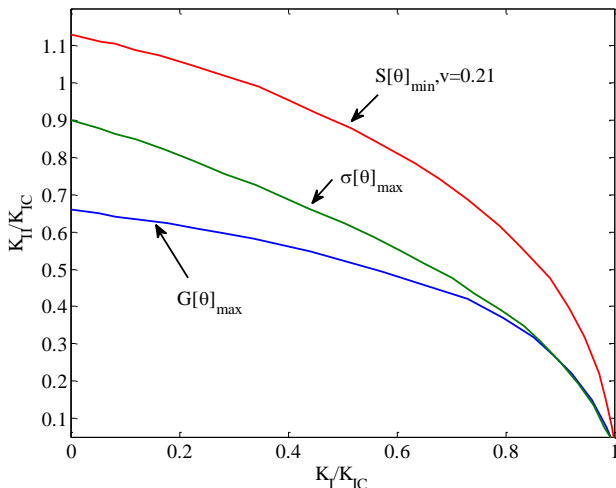
## ۲- مکانیک شکست الاستیک خطی و معیارهای

## گسترش ترک

حالت‌های مختلف بارگذاری روی نوک یک ترک منجر به تشکیل حالت‌های مختلف تغییرشکل خواهد شد. در حالت کلی، نوک یک ترک در حالت الاستیک خطی می‌تواند تحت تنش عمودی  $\sigma$ ، تنش برشی  $\tau_i$  درون صفحه<sup>۹</sup> و تنش برشی  $\tau_0$  بیرون از

در این رابطه  $\mu$  و  $\nu$  پارامترهای الاستیک سنگ،  $a$  نصف طول ترک و  $D_x$  و  $D_y$  به ترتیب میزان تغییر شکل عمودی و برشی در المان نوک ترک می‌باشند.

ضرایب شدت تنش مود I و II ( $K_I$  و  $K_{II}$ ) برای میدان تنش تکینه<sup>۱۲</sup> در نوک ترک محاسبه می‌شوند و می‌توانند به عنوان معیار شکستگی به کار روند. یک ترک، زمانی رشد می‌کند که  $K_I$  یا  $K_{II}$  با مقدار آستانه برابر شود که در این نقطه  $K_I = K_{IC}$  و  $K_{II} = K_{IIC}$  است.  $K_I = K_{IC}$  و  $K_{II} = K_{IIC}$  به ترتیب چقرمگی مود یک و مود دو شکست مواد هستند. گسترش ترک زمانی رخ خواهد داد که ترکیب خاصی از مقادیر  $K_I$  و  $K_{II}$ ،  $f(K_I, K_{II})$  به مقدار بحرانی  $f_c(K_I, K_{II})$  برسد. مقدار  $f_c(K_I, K_{II})$  به عنوان پوش چقرمگی شکست در حالت مد ترکیبی I-II یا به عنوان پوش  $K_I - K_{II}$  شناخته می‌شود. این پوش با استفاده از سه معیار اساسی برای مطالعه گسترش شکستگی و یافتن جهت گسترش آن در حالت شکست ترکیبی که شامل معیار تنش مماسی حداکثر<sup>۱۳</sup> ( $\sigma$ -Criterion)، معیار نرخ آزادسازی انرژی کرنشی حداکثر<sup>۱۴</sup> (G-Criterion) و معیار چگالی انرژی کرنشی حداقل<sup>۱۵</sup> (S-Criterion) است قابل پیش-بینی می‌باشد ([۱۰، ۱۱ و ۱۲]). لازم به ذکر است که این معیارها توسط محققین مختلفی بررسی شده و با نتایج تجربی نیز مقایسه شده‌اند (شکل ۱).



شکل ۱: پوش های چقرمگی شکست برای معیارهای مختلف گسترش ترک در حالت شکست ترکیبی [۱۳].

صفحه<sup>۱۰</sup> یا ترکیبی از هر کدام از آن‌ها باشد. بنابراین یک ترک مسطح و هموار با ضخامت صفر دارای سه نوع مود اصلی برای تغییر شکل نوک ترک است. این مودها شامل مود I، مود کشش یا باز شدگی، مود II، مود لغزش یا برشی در یک صفحه و مود III، مود پاره‌شدگی یا برش در دو صفحه هستند. هر گونه ترکیبی از دو یا سه مود بیان شده باعث شکل‌گیری بارگذاری ترکیبی خواهد شد. بنابراین بر هم نهی این سه مود اصلی برای شرح و توصیف اغلب حالت‌های کلی تغییر شکل نوک ترک و میدان تنش کافی است.

تأثیر بارهای وارده بر گسترش ترک می‌تواند بوسیله پارامترهای معینی که شدت تنش و کرنش را در نزدیکی نوک ترک مشخص می‌کنند، بیان شود. یکی از این پارامترها که معرف حوزه تنش در نوک ترک در حالت الاستیک خطی است ضریب شدت تنش<sup>۱۱</sup> است. هدف از تحلیل شدت تنش، اندازه‌گیری نیروهای واقعی عمل‌کننده بر نوک ترک است که با استفاده از این پارامتر می‌توان تخمین زد که آیا ترک رشد می‌کند یا در شرایط پایدار باقی می‌ماند.

ضرایب شدت تنش از روش‌های مختلف تحلیلی، عددی، تجربی و تقریبی قابل محاسبه هستند. در روش‌های عددی تخمین فاکتور تنش به طور معمول بر اساس دو دیدگاه محاسبه تنش و یا تغییر شکل انجام می‌شود. بر اساس دیدگاه تغییر شکل، با محاسبه میزان تغییر شکل رخ داده بر روی المان‌های نزدیک نوک ترک می‌توان ضرایب شدت تنش را محاسبه کرد.

ضرایب شدت تنش در یک المان ناپیوسته، با محاسبه اختلاف جابجایی‌های برشی و عمودی دو سوی المان، در مرکز المان نوک ترک برآورد می‌شوند. بر اساس میزان تغییر شکل‌های عمودی و برشی محاسبه شده در روش عددی مورد استفاده (ناپیوستگی- جابجایی)، ضرایب شدت تنش مود یک و دو ( $K_I$  و  $K_{II}$ ) با استفاده از رابطه ۱ قابل دستیابی هستند [۴]:

$$K_I = \frac{\mu}{4(1-\nu)} \left( \frac{2\pi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} D_y(a), \quad (1)$$

$$K_{II} = \frac{\mu}{4(1-\nu)} \left( \frac{2\pi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} D_x(a)$$

مؤلفه رشد می‌کند و جهت رشد ترک در راستایی خواهد بود که مقدار تنش متناظر، بیشینه است.

با توجه با اینکه اغلب سنگ‌ها رفتار شکننده‌ای تحت تنش کشش از خود نشان می‌دهند، چقرمگی مود یک شکست  $K_{IC}$  (تحت شرایط کرنش صفحه‌ای) همراه معیار تنش مماسی ماکزیمم (معیار  $\sigma$ ) که بوسیله اردوغان و سی<sup>۱۶</sup> [۱۷] معرفی شده است به‌طور گسترده‌ای برای پیش‌بینی گسترش شکستگی استفاده می‌شود. این معیار که به‌وسیله محققین زیادی استفاده شده است با نتایج آزمایشگاهی نیز تطابق بسیار خوبی دارد [۱۱، ۲۰-۱۸]. اردوغان و سی [۱۷] اولین محققینی بودند که مسئله گسترش ترک تحت بارگذاری غیر صفحه‌ای را برای محاسبه تنش مماسی ( $\sigma_\theta$ ) بررسی کردند. این معیار بر پایه فرضیات زیر استوار است:

- انتشار ترک از نوک آن آغاز شده و مسیر توسعه آن دارای زاویه  $\theta$  نسبت به صفحه اصلی ترک است.
- شروع رشد ترک در امتداد تنش مماسی حداکثر رخ می‌دهد:

$$\frac{\partial \sigma_\theta^2}{\partial \theta^2} < 0 \text{ و } \sigma_{r\theta} = 0 \text{ یا } \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

- رشد ترک زمانی رخ می‌دهد که تنش مماسی حداکثر به مقدار بحرانی تعریف شده برای ماده برسد ( $\sigma_{\theta m} = \sigma_{\theta c}$ ).
- جهت رشد ترک به راستای تنش مماسی حداکثر عمود است.

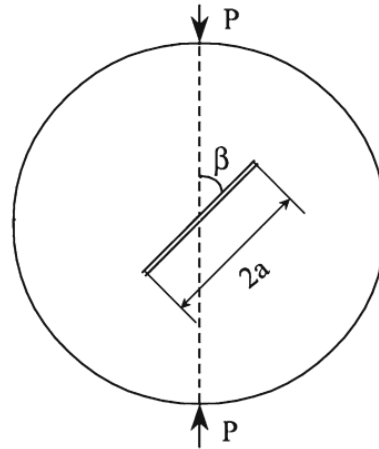
این معیار، تنش‌های برشی را به خودی خود در رشد ترک بی‌اثر می‌داند ولی اثر تنش‌های برشی را در میزان بازشدگی ترک و جهتی که حداکثر بازشدگی اتفاق می‌افتد، لحاظ می‌کند. با توجه به اینکه تنش حداکثر در راستای  $\theta_m$  رخ می‌دهد و در این راستا تنش برشی صفر است، با استفاده از روابط موجود در مکانیک شکست الاستیک خطی میزان تنش کششی قابل محاسبه است [۷]:

$$\sigma_{r\theta m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta_m}{2} \left[ \begin{array}{l} K_I \sin \frac{\theta_m}{2} \cos \frac{\theta_m}{2} + \\ K_{II} (1 - 3 \sin^2 \frac{\theta_m}{2}) \end{array} \right] = 0 \quad (3)$$

با حل این رابطه،  $\theta_m$  به صورت رابطه زیر به‌دست می‌آید:

تخمین پوش  $K_I - K_{II}$  شامل تعیین مقادیر  $K_{IC}$  و  $K_{IIC}$  و همچنین زوج داده‌هایی از فاکتورهای شدت تنش ( $K_I$  و  $K_{II}$ ) برای یک ترک تحت بارگذاری مد ترکیبی I-II است.

برای دستیابی به این داده‌ها نمونه‌ای با هندسه خاص نیاز است که ترک درون آن بتواند در سه حالت مد خالص I، مد خالص II و مد ترکیبی I-II بارگذاری شود. یکی از مناسب‌ترین نمونه‌ها برای مطالعه فرآیند شکست در حالت ترکیبی (I/II) و اندازه-گیری چقرمگی شکست در مصالح ترد، استفاده از نمونه دیسکی شکل دارای ترک میانی می‌باشد [۱۶-۱۴]. این نمونه‌ها که به‌طور گسترده در آزمایش برزیلین به‌منظور اندازه‌گیری مقاومت کششی مصالح استفاده می‌شوند در مطالعه پارمترهای مکانیک شکست سنگ در حالت مد ترکیبی کاربرد فراوانی یافته‌اند (شکل ۲).



شکل ۲: نمای شماتیک نمونه برزیلی (CSCBD) برای تخمین چقرمگی شکست مد III و حالت ترکیبی

چون مقدار تنش‌های نزدیک نوک ترک بیشتر از مقاومت ماده سنگ است (در نوک ترک تنش‌ها بی‌نهایت است)، ناحیه نزدیک نوک ترک به شکل دایره‌ای با مرکزیت نوک ترک و شعاع  $r_0$  به‌عنوان زون پلاستیک فرض می‌شود. در معیار مبتنی بر مؤلفه‌های تنش، روی محیط این دایره، مؤلفه‌های تنش مماسی ( $\sigma_\theta$ ) و تنش برشی ( $\tau_{r\theta}$ ) محاسبه می‌شود. با استفاده از این مؤلفه‌ها و پارامترهای مقاومتی که عبارتند از تنش مماسی بحرانی (مقاومت کششی) و تنش برشی بحرانی (مقاومت برشی)، توانایی ترک در ادامه رشد بررسی می‌شود. هر کدام از مؤلفه‌ها که زودتر به مقدار بحرانی خود برسد، ترک در حالت متناظر با آن

از طرف دیگر فرمول‌بندی به‌گونه‌ای است که تمام گره‌ها در ارتباط با یکدیگر هستند. این دو عامل مهم همراه با حجم معادلات کمتر، بر دقت بیشتر این روش افزوده است. روش المان مرزی قادر است یک محیط تنش‌ی شامل ترک را بدون آن‌که در گام‌های رشد طول ترک نیاز به تجدید المان‌بندی باشد، همزمان با رشد طول آن تحت بارگذاری اعمالی، مدل نماید.

روش المان مرزی به‌طور کلی به دو روش غیرمستقیم<sup>۱۷</sup> و مستقیم<sup>۱۸</sup> تقسیم می‌شود که به موازات هم توسعه داده شده‌اند. روش غیرمستقیم دارای مفهوم فیزیکی روی المان‌های مرز است در حالی که روش مستقیم یک تکنیک ریاضیاتی است و به تئوری پتانسیل ارتباط دارد. روش المان مرزی غیرمستقیم به دو گروه تنش موهومی<sup>۱۹</sup> (FSM) و ناپیوستگی-جابجایی<sup>۲۰</sup> (DDM) تقسیم می‌شوند. DDM به‌طور گسترده‌ای در حل مسائل مربوط به گسترش ترک و مکانیک شکست استفاده شده است. این امر به دلیل عدم نیاز DDM به مش‌بندی مجدد در هنگام گسترش ترک است.

### ۳-۱- روش ناپیوستگی-جابجایی (DDM)

روش ناپیوستگی-جابجایی که یک روش المان مرزی غیرمستقیم است توسط کروچ<sup>۲۱</sup> ([۲۱] و [۲۲]) توسعه داده شده است. در این روش با استفاده از توابع تأثیر<sup>۲۲</sup> مجموعه‌ای از معادلات جبری که تنها ناشی از شرایط مرزی هستند شکل می‌گیرد. فرآیند مدل‌سازی در این روش عددی شامل گسسته‌سازی مرز بوسیله تعداد مشخصی المان ناپیوستگی-جابجایی است که با برآورد توابع تأثیر هر کدام از این المان‌ها و تشکیل معادلات جبری مربوطه، میزان ناپیوستگی<sup>۲۳</sup> که باعث ایجاد مقدار مشخص تنش‌ها و تغییر شکل‌ها بر روی مرز شده محاسبه می‌شوند.

این روش برای مدل‌سازی مسائل گسترش ترک در مکانیک شکست سنگ بسیار کاربردی و مناسب است. در این روش میزان تغییر شکل عمودی و موازی با ترک (تغییر شکل ناشی از بازشدگی ترک و تغییر شکل ناشی از لغزش ترک) به راحتی قابل محاسبه است. به‌طور ویژه، این روش می‌تواند تخمین تنش و تغییرشکل برای مسائلی همانند یک ترک خمیده، یک ترک متقاطع و یک ترک دارای نیروهای اصطکاکی را سهولت بخشد [۹].

$$\theta_m = 2 \arctan \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \right) \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right] \quad (۴)$$

این معیار بر اساس چقرمگی شکست برای مود یک به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\cos^3 \frac{\theta_m}{2} \left[ K_I - 3K_{II} \tan \frac{\theta_m}{2} \right] = \quad (۵)$$

$$K_{IC} (0.866 K_{IIC})$$

رابطه ۵ برای ارزیابی توانایی ترک در ادامه گسترش خود مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر مقدار عبارت سمت چپ معادله برابر یا بیشتر از چقرمگی ماده شود، ترک می‌تواند به رشد خود ادامه دهد، در غیر این صورت رشد ترک متوقف می‌شود. با افزایش بار وارده می‌توان نیروی لازم برای گسترش ترک و ارضا شدن معادله بالا را تأمین کرد [۱۱].

حل تحلیلی مسائل مربوط به گسترش ترک نشان می‌دهد که تنش‌ها و تغییر شکل‌های موجود در جلوی نوک ترک که با فاصله  $r$  نسبت به آن قرار دارند به ترتیب با نسبت  $\sqrt{r}$  تغییر می‌کنند. بنابراین برای نشان دادن تغییرات  $\sqrt{r}$  در مجاورت نوک ترک نیاز به المان ویژه نوک ترک برای افزایش دقت و کارایی محاسبات احساس می‌شود. بدین منظور المان ویژه نوک ترک ارائه شده توسط شو و کروچ ([۴]) برای رفع تکنیکی نوک ترک استفاده شد.

### ۳-۲ روش عددی مورد استفاده

در روش المان مرزی معادلات دیفرانسیلی حاکم به‌صورت انتگرال‌های مشخصه‌ای بر روی مرز تبدیل می‌شوند و سپس این انتگرال‌ها به‌صورت عددی بر روی اجزای محیط که گسسته شده‌اند، محاسبه می‌شوند. همانند دیگر روش‌های عددی، که در آن‌ها شرایط مرزی باید ارضا شوند، در نهایت یک سیستم از معادلات جبری خطی از مجموع معادلات حاکم بر اجزای مسئله پدیدار می‌شود.

روش المان مرزی به خوبی می‌تواند برای حل مسائلی با هندسه پیچیده استفاده شود. با وجود اینکه در این روش تمام تقریب‌ها روی سطح انجام می‌شود ولی این روش برای نواحی که در آن‌ها متغیرها به سرعت تغییر می‌کنند دقت بهتری نسبت به روش المان محدود دارد. در این روش تا قبل از مرحله گسسته‌سازی محیط، هیچ تقریبی بر فرمول‌بندی حاکم بر مسئله وارد نشده و

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2GD_x \left[ 2f_{,xy} + yf_{,xyy} \right] + \\ & 2GD_y \left[ g_{,yy} + yg_{,yyy} \right] \\ \sigma_{yy} &= 2GD_x \left[ -yf_{,xyy} \right] + \\ & 2GD_y \left[ g_{,yy} - yg_{,yyy} \right] \\ \sigma_{xy} &= 2GD_x \left[ 2f_{,yy} + yf_{,yyy} \right] + \\ & 2GD_y \left[ -yg_{,xyy} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

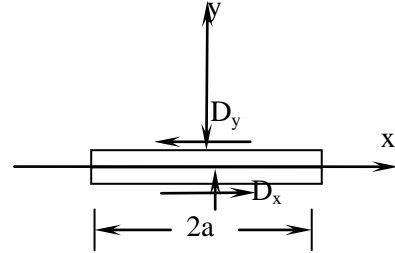
در روابط ارائه شده،  $G$  مدول برش و  $f_{,x}$ ،  $f_{,y}$ ،  $g_{,x}$ ،  $g_{,y}$  بقیه توابع، مشتقات جزئی توابع سازگار  $f(x,y)$  و  $g(x,y)$  نسبت به  $x$  و  $y$  هستند [۲۳].

به منظور افزایش دقت محاسبات، المان‌های خطی و کوادراتیک در روش DD توسعه داده شده‌اند. در المان خطی هر المان دارای دو گره و در المان کوادراتیک دارای سه گره است. محاسبات المان کوادراتیک<sup>۲۶</sup> در روش ناپیوستگی-جابجایی بر اساس انتگرال‌گیری تحلیلی از توابع شکل<sup>۲۷</sup>، که با برهم نهی کوادراتیک روی المان‌های خطی ناپیوستگی-جابجایی همراه می‌باشند، انجام می‌شود [۲۳].

### ۲-۳- فرمول‌بندی معادلات جبری خطی

دو نوع شرایط مرزی در مسائل الاستیسیته صفحه‌ای به‌طور معمول مورد توجه قرار می‌گیرد که شامل شرایط مرزی عمودی و برشی  $(\sigma_n^i = (\sigma_n^i)_0)$  و  $(\sigma_s^i = (\sigma_s^i)_0)$  و شرایط مرزی تغییر شکل عمودی و برشی  $(u_n^i = (u_n^i)_0)$  و  $(u_s^i = (u_s^i)_0)$  است. این شرایط مرزی روی مرکز هر کدام از زیر المان‌های یک المان کوادراتیک اعمال می‌شوند. بنابراین براساس روابط موجود در فرمولاسیون روش DD، مؤلفه‌های تنش یا تغییر شکل روی المان  $i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, N$ ) می‌توانند با استفاده از ضرایب تأثیر (عبارات موجود در درون کروشه‌ها در روابط ۷ و ۸) به مقادیر ناپیوستگی-جابجایی بر روی المان  $i$  مرتبط شوند [۲۱].  
بنابراین یک سیستم معادلات جبری  $(N=3N)$  ۲ معادله‌ای برای حل  $(N=3N)$  ۲ مجهول از اجزای ناپیوستگی-جابجایی وجود خواهد داشت:

یک المان ناپیوستگی-جابجایی با طول  $2a$  که در امتداد محور  $x$  قرار دارد در شکل ۳ نشان داده شده است. دو سطح المان ناپیوستگی-جابجایی می‌توانند در امتداد محور  $y$  به دو بخش مثبت  $(y=0_+)$  و بخش منفی  $(y=0_-)$  تقسیم شوند.



شکل ۳: المان ثابت<sup>۲۴</sup> در روش ناپیوستگی-جابجایی

تغییرشکل، یک تغییر ثابت را در عبور از یک طرف سطح به طرف دیگر تحمل می‌کند. بنابراین مقادیر ثابت تغییرشکل  $D_x$  و  $D_y$  می‌تواند به صورت رابطه ۴-۱ نوشته شود:

$$D_x = u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+), \quad (6)$$

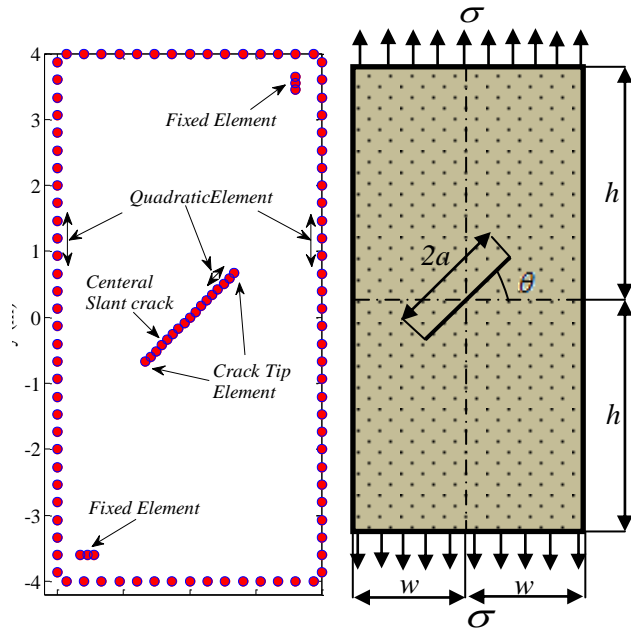
$$D_y = u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+)$$

قرارداد علامت مثبت  $D_x$  و  $D_y$  در شکل ۳ نشان داده شده است [۴].

میزان تنش‌ها و تغییرشکل‌های ناشی از جابجایی افقی و عمودی یک المان ثابت ناپیوستگی-جابجایی، در یک محیط بی‌نهایت، در امتداد محور  $x$  برحسب توابع سازگار<sup>۲۵</sup>  $f(x,y)$  و  $g(x,y)$  به صورت روابط ۷ و ۸ ارائه شده است (شو و کروش، ۱۹۹۵).

$$\begin{aligned} u_x &= D_x \left[ 2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,xx} \right] + \\ & D_y \left[ -(1-2\nu)g_{,x} - yg_{,xy} \right] \\ u_y &= D_x \left[ (1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy} \right] + \\ & D_y \left[ 2(1-\nu)g_{,y} - yg_{,yy} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

المان کوادراتیک و ۲ المان نوک ترک و مرز صفحه نیز به وسیله ۳۰ المان کوادراتیک گسسته شده است. دو المان ثابت کوادراتیک نیز در گوشه های صفحه به منظور جلوگیری از چرخش آن قرار داده شده اند. ضرایب شدت تنش حاصله نشان می دهد که مقادیر به دست آمده از برنامه 2DFPM با دقت بسیار بالایی با نتایج منتشر شده توسط علی آبادی تطابق دارند [۲۵] (جدول ۱).



شکل ۴: الف- صفحه محدود تحت کشش و دارای ترک مرکزی زاویه-دار، ب- نحوه گسسته سازی مرز صفحه محدود به همراه ترک مرکزی و المان های ثابت

#### ۴-۲ ترک خمیده تحت کشش دو محوره در محیط نامحدود

با توجه به احتمال حضور ترک های خمیده و منحرف شده در درون سازه ها و اجسام [۴]، اعتبار برنامه عددی پیشنهاد داده شده برای مدل سازی ترک خمیده سنجیده شد. بدین منظور یک ترک دایره ای با زوایای مختلف مرکزی که در یک محیط نامحدود تحت تنش های کششی قرار دارد مدل گردید (شکل ۵-الف).

حل تحلیلی مد یک و دو ضریب شدت تنش،  $K_I$  و  $K_{II}$  و نرخ آزادسازی انرژی کرنشی  $G$  برای یک ترک دایره ای، توسط کوتزل<sup>۳۰</sup> و رایس<sup>۳۱</sup> ([۲۶]) به صورت رابطه ۱۰ ارائه شده است:

$$b_s^i = \sum_{j=1}^N C_{ss}(i, j) D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{sn}(i, j) D_n^j \quad (9)$$

$$b_n^i = \sum_{j=1}^N C_{ns}(i, j) D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}(i, j) D_n^j, \quad i = 1, N$$

مقادیر  $b_s^i$  و  $b_n^i$  معرف مقادیر مرزی معلوم تنش و تغییر شکل هستند و  $C_{ss}(i, j)$  نیز ضریب تأثیر متناسب با هندسه و شرایط بارگذاری است که در مجموع برای برآورد مجهولات  $D_n^j$  و  $D_s^j$  استفاده می شوند [۳، ۲۴].

#### ۴- اعتبارسنجی برنامه عددی توسعه داده شده (2DFPM)

برای اعتبارسنجی روش ارائه شده از چندین مسئله ساده که دارای حل تحلیلی می باشند، استفاده شد. برای اعتبارسنجی ضرایب شدت تنش از مدل سازی یک ترک مرکزی زاویه دار در محیط محدود استفاده شد. همچنین به منظور برآورد دقت روش عددی توسعه داده شده در تخمین نرخ آزادسازی انرژی کرنشی، ترک خمیده تحت کشش دو محوره در محیط نامحدود مدل سازی شد. دلیل استفاده از این مسائل وجود حل تحلیلی برای آن ها و همچنین ارائه حل عددی توسط دیگر محققین برای این مسائل است. مقایسه حل عددی صورت گرفته توسط روش ارائه شده و حل تحلیلی مسائل نشان داد که روش ارائه شده دقت بالایی دارد.

##### ۴-۱ ترک مرکزی<sup>۲۸</sup> زاویه دار در محیط محدود

برای اعتبارسنجی برنامه عددی ارائه شده در محیط محدود، مدل سازی یک ترک مرکزی زاویه دار که در درون یک صفحه با ابعاد محدود قرار دارد انجام شد. سپس مقادیر بهنجار شده ضریب شدت تنش برای نوک ترک محاسبه و با مقادیر ارائه شده در مراجع مقایسه شد.

در این مسئله یک ترک با طول  $2a$  که نسبت به محور  $x$  با زاویه ۴۵ قرار دارد، در درون صفحه ای با نسبت طول به عرض  $(h/w)$  برابر با ۲ مدل سازی شد (شکل ۴-الف). صفحه محدود تحت تنش کششی  $\sigma$  قرار داشته که به صورت قرینه بر سطوح انتهایی آن وارد می شد.

نحوه گسسته سازی مرز صفحه محدود، ترک مرکزی و المان های ثابت بوسیله المان های کوادراتیک و نوک ترک، در شکل ۴-ب نشان داده شده است. در این شکل ترک مرکزی به وسیله ۵

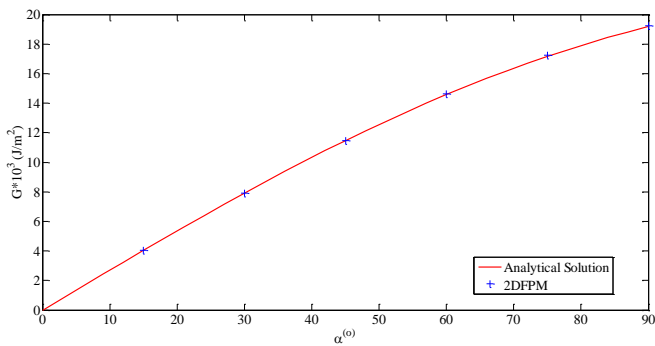
یک ترک دایره‌ای با شعاع  $r=1\text{m}$  که تحت تنش کششی دومحوره  $\sigma=10\text{MPa}$  قرار دارد با تغییر زوایای مرکزی مطالعه شد. خصوصیات مکانیکی محیط دربرگیرنده شامل مدول الاستیسیته  $E=10\text{GPa}$  و نسبت پواسون  $\nu=0.2$  است. برای

$$K_I = \sigma \cos \frac{\alpha}{4} \left[ \frac{\pi r \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{4}} \right]^{0.5},$$

$$K_{II} = \sigma \sin \frac{\alpha}{4} \left[ \frac{\pi r \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{4}} \right]^{0.5}, \quad G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (10)$$

جدول ۱: مقادیر ضریب شدت تنش بهنجار شده برای ترک زاویه‌دار در صفحه محدود

$K_{II} / (\sigma\sqrt{\pi a})$		$K_I / (\sigma\sqrt{\pi a})$		$a/w$
نتایج تحقیق علی آبادی [۲۵].	نتایج 2DFPM	نتایج تحقیق علی آبادی [۲۵].	نتایج 2DFPM	
۰/۵۱	۰/۵۱۳	۰/۵۲	۰/۵۱۸	۰/۲
۰/۵۲	۰/۵۲۲	۰/۵۴	۰/۵۴۰	۰/۳
۰/۵۳	۰/۵۳۵	۰/۵۷	۰/۵۷۲	۰/۴
۰/۵۵	۰/۵۵۲	۰/۶۱	۰/۶۱۲	۰/۵
۰/۵۷	۰/۵۷۳	۰/۶۶	۰/۶۶۲	۰/۶

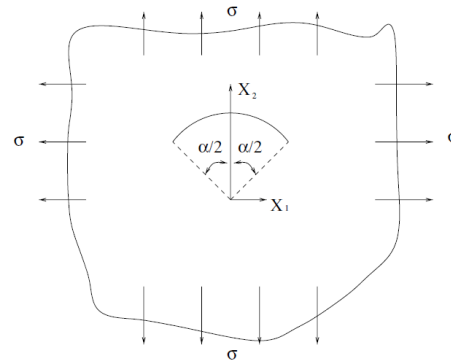


شکل ۶ نرخ آزاد سازی انرژی کرنشی (G) برای ترک دایره‌ای با زوایای مرکزی مختلف

### ۳-۴- نمونه دیسکی بدون ترک مرکزی ۳۲

برای اعتبارسنجی برنامه عددی ارائه شده در مدل‌سازی نمونه برزلی و برآورد تنش‌های افقی و عمودی در درون نمونه، یک نمونه دیسکی بدون ترک مرکزی و تحت بارگذاری قطری مدل‌سازی شد (شکل ۸). تنش‌های افقی و عمودی در امتداد محورهای نمونه محاسبه و با نتایج تحلیلی مقایسه شدند (جدول شماره ۲). در این مدل‌سازی قطر نمونه ۱۰۰ سانتیمتر، فشار وارده بر نمونه ۱ مگاپاسکال و نسبت پواسون  $\nu=0.1$  و مدول یانگ

مدل‌سازی ترک از ۵۰ المان کوادراتیک به همراه ۲ المان نوک ترک استفاده شد. گسسته‌سازی مرز ترک خمیده به وسیله ۱۰ المان کوادراتیک و ۲ المان نوک ترک صورت پذیرفته است.

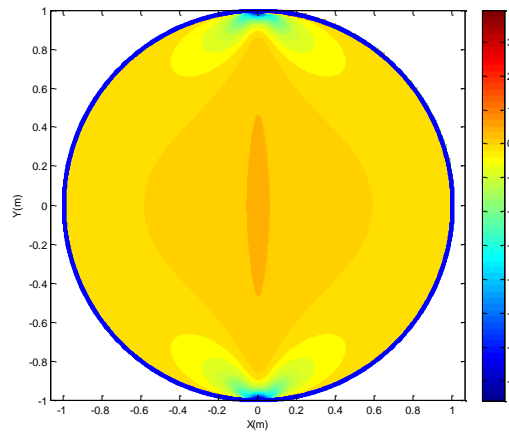


شکل ۵: ترک دایره‌ای تحت تنش‌های کششی یکنواخت

مقایسه مقادیر تحلیلی و عددی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی (G) در شکل ۶ نشان داده شده است. بررسی نتایج نشان می‌دهد که مقادیر حاصل از برنامه 2DFPM دارای دقت کافی در حل مسائل مربوط به ترک‌های خمیده و منحرف شده می‌باشند.

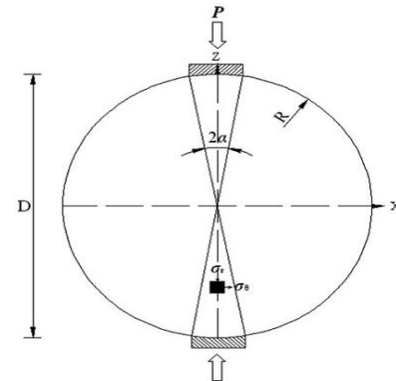


امتداد بار وارده صورت می گیرد و با فاصله گرفتن از مرکز نمونه تنش های کششی به شدت کاهش می یابند.



شکل ۹: توزیع تنش در نمونه دیسکی حاصل از برنامه عددی 2DFPM

برابر با ۲۲۰۰ مگاپاسکال بوده است. مرز نمونه با استفاده از ۵۰ المان مدل سازی شد.



شکل ۸: نمونه برزیلی بدون ترک مرکزی تحت بارگذاری خطی

در شکل ۹ چگونگی توزیع تنش افقی در درون نمونه نشان داده شده است. همان گونه که در شکل نشان داده شده است بیشترین تمرکز تنش در مرکز نمونه و در امتداد تنش وارده ایجاد شده است. بنابراین توسعه ترک کششی بیشتر در میانه نمونه و در

جدول ۲: تنش های افقی و عمودی بهنجار شده در امتداد محور X نمونه برزیلی

$\sigma_{yy} / p$		$\sigma_{xx} / p$		$x/R$
نتایج تحلیلی	نتایج حاصل از 2DFPM	نتایج تحلیلی	نتایج حاصل از 2DFPM	
-۰/۱۱۹۸	-۰/۱۱۸۷	۰/۰۳۹۸	۰/۰۳۹۲	۰
۰-/۱۱۶۷	۰-/۱۱۵۷	۰/۰۳۸۲	۰/۰۳۷۶	۰/۱
-۰/۱۰۷۸	-۰/۱۰۷۰	۰/۰۳۳۹	۰/۰۳۳۴	۰/۲
-۰/۰۹۴۶	-۰/۰۹۴۱	۰/۰۲۷۸	۰/۰۲۷۴	۰/۳
-۰/۰۷۸۹	-۰/۰۷۸۸	۰/۰۲۰۹	۰/۰۲۰۷	۰/۴
-۰/۰۶۲۴	-۰/۰۶۲۶	۰/۰۱۴۴	۰/۰۱۴۳	۰/۵
-۰/۰۴۶۵	-۰/۰۴۷۰	۰/۰۰۸۹	۰/۰۰۸۸	۰/۶
-۰/۰۳۲۱	-۰/۰۳۲۸	۰/۰۰۴۷	۰/۰۰۴۶	۰/۷
-۰/۰۱۹۵	-۰/۰۲۰۳	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۹	۰/۸
-۰/۰۰۸۹	-۰/۰۰۹۸	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۳	۰/۹
۰	-	۰	-	۱

موجود در نمونه دیسکی، یک نمونه دیسکی دارای ترک مرکزی که تحت بارگذاری محوری در امتداد یکی از قطرهای خود است، مدل سازی شد. با توجه به این که ترک دارای مد ترکیبی است به دست آوردن زاویه ای که در آن

#### ۴-۳- نمونه دیسکی دارای ترک مرکزی

برای اعتبارسنجی برنامه عددی ارائه شده در مدل سازی نمونه دیسکی دارای ترک مرکزی و قابلیت این برنامه در تعیین دقیق مقادیر فاکتور شدت تنش روی نوک ترک

در برآورد پارامترهای مکانیک شکستی در نمونه‌های دیسکی دارد. در این مدل‌سازی‌ها قطر نمونه ۱۰۰ سانتی متر، فشار وارده بر نمونه ۲۰ مگاپاسکال و نسبت پواسون ۰/۲۵ و مدول یانگ برابر با ۱۰۰۰۰ مگاپاسکال بوده است.

ترک فقط تحت مد برش خالص گسترش می‌یابد توسط محققین مختلفی مطالعه شده است. در این مطالعه نیز زاویه مناسب قراگیری ترک دارای مد برشی خالص در درون نمونه برزلی برآورد شد و با نتایج ارائه شده توسط دیگر محققین مقایسه شد (جدول شماره ۳). نتایج نشان می‌دهد که برنامه عددی توسعه داده شده قابلیت مناسبی

جدول ۳: زاویه قرارگیری ترک ( $\theta$ ) دارای مد خالص برش برای ترک هایی با طول مختلف

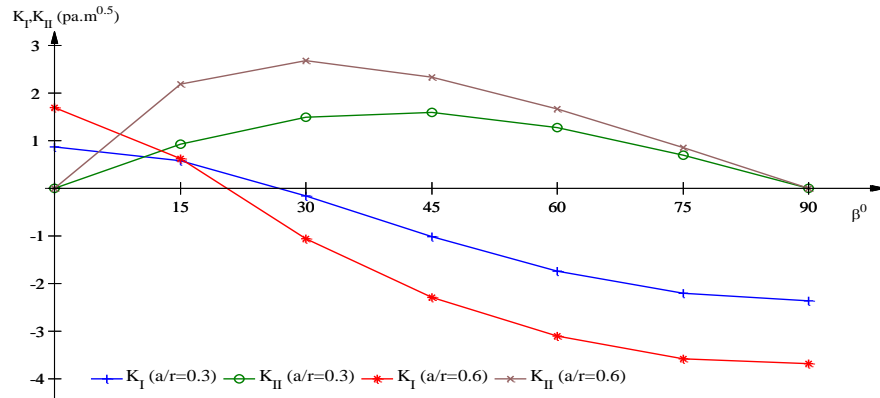
نتایج تحقیق اتکینسون <sup>۳۴</sup>	نتایج تحقیق آواجی <sup>۳۵</sup> و ساتو <sup>۳۶</sup> [۲۸].	نتایج تحقیق سانچز <sup>۳۷</sup> [۲۹].	نتایج 2DFPM	a/R
۲۹/۶	-	-	۲۹/۶۲	۰/۱
۲۸/۷	-	-	۲۸/۶۴	۰/۲
۲۷/۲	۲۷/۲	۲۷/۷	۲۷/۱۶	۰/۳
۲۵/۴	۲۵/۲	۲۵/۲	۲۵/۲۳	۰/۴
۲۳/۳	۲۲/۹	۲۳/۲	۲۳/۰	۰/۵
۲۱/۳	۲۰/۱	۲۰/۰	۲۰/۳۸	۰/۶

یکسان بودن جهت سطوح لغزش ترک نسبت به هم است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش نسبت  $a/R$  مد خالص برش در زاویه کمتری رخ می‌دهد. در شکل ۱۱ و ۱۲ میزان جابجایی نرمال و برشی در امتداد ترک برای زوایای مختلف نشان داده شده است. همان‌گونه که مشخص است با افزایش زاویه قرارگیری ترک میزان جابجایی نرمال ترک از حالت منفی (بازشدگی) به مثبت (بسته شدن) تغییر می‌کند. این تغییر حالت در زاویه ۲۷/۲ درجه رخ می‌دهد که با نتایج ارائه شده در شکل شماره ۱۰ همخوانی دارد. با افزایش زاویه قرارگیری ترک میزان جابجایی برشی در امتداد آن افزایش یافته که در زاویه ۴۵ درجه به حداکثر خود رسیده و برای زوایای بیشتر کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که در این مطالعه فرض بر این است که ترک باز بوده و سطوح آن با هم در تماس نبوده و بنابراین چسبندگی و زاویه اصطکاک بین سطوح آن وجود ندارد و شرایط ترک باز بر آن حاکم است.

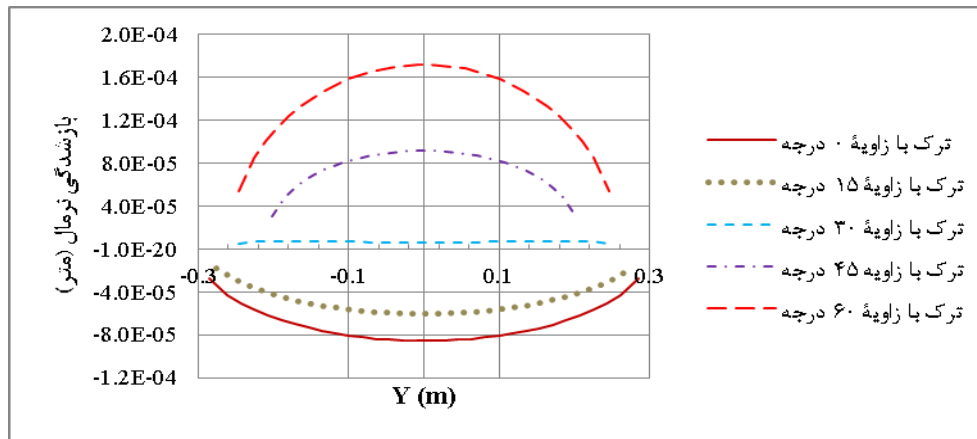
#### ۵- مدل‌سازی گسترش ترک در نمونه دیسکی

به منظور بررسی چگونگی توسعه ترک مرکزی در نمونه برزلی تحت فشار خطی، مدل‌سازی عددی چندین نمونه دیسکی دارای ترک مرکزی با زوایای قرارگیری متفاوت انجام شد. پارامترهای الاستیک نمونه  $E=10\text{GPa}$ ،  $\nu=0/25$  و چقرمگی برابر با  $0/2\text{MPa m}^{0.5}$  فرض شد. تنش‌های فشاری وارده ۲۰- مگاپاسکال بوده که در جهت محوره  $y$  اعمال شده است.

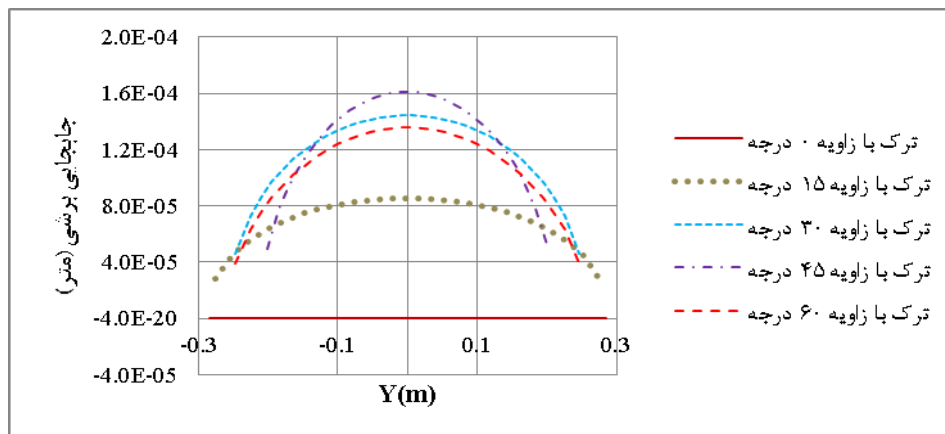
در شکل ۱۰ تغییرات فاکتور شدت تنش مد I و II برای دو نسبت  $a/R=0/3$  و  $a/R=0/6$  نشان داده شده است. همان‌گونه که در شکل نشان داده شده است برای نسبت  $a/R$  برابر با ۰/۳، ترک با زاویه قرارگیری حدود ۲۷ درجه در حالت برش خالص (مد II) خواهد بود. لازم به ذکر است برش خالص زمانی رخ می‌دهد که فاکتور شدت تنش مد I برابر با صفر باشد (شکل ۱۰). فاکتور شدت تنش مد I در قبل از این زاویه مثبت و بعد از آن منفی است ولی فاکتور شدت تنش مد II همیشه مثبت است. فاکتور شدت تنش منفی بیانگر وجود تنش فشاری در نوک ترک است، در حالی که مثبت بودن فاکتور شدت تنش مد II بیانگر



شکل ۱۰: تغییرات فاکتور شدت تنش در نوک ترک موجود در نمونه دیسکی برای دو نسبت  $a/R=0/3$  و  $a/R=0/6$  در زوایای مختلف قرارگیری ترک



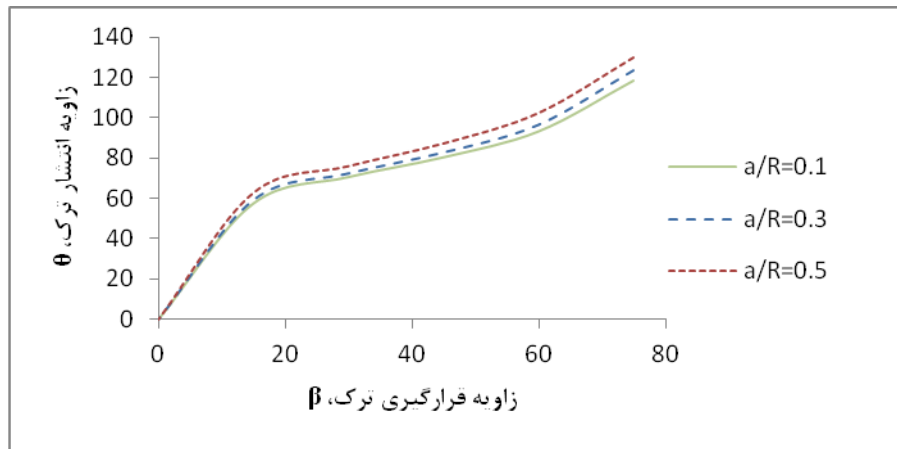
شکل ۱۱: میزان بازشدگی ترک برای حالات مختلف بارگذاری



شکل ۱۲: میزان تغییر شکل برشی در امتداد ترک برای حالات مختلف بارگذاری

مطالعات تجربی انجام شده توسط دیگر محققین [۱۶، ۳۰] روی نمونه‌های برزیلین نشان می‌دهد که با افزایش زاویه قرارگیری ترک، گسترش ترک از نوک آن صورت نگرفته و یک ترک کششی جدیدی از میانه ترک موجود ایجاد می‌شود. زاویه پیشنهادی برای تعیین مرز بین رشد ترک موجود و ایجاد ترک کششی جدید حدود ۷۵ درجه برآورد شده است. بنابراین در این مطالعه ترکی با نسبت  $a/R$  برابر با  $0/3$  و حداکثر زاویه ۷۵ درجه در یک نمونه دیسکی مدل‌سازی شد که از معیار تنش مماسی حداکثر، برای تخمین جهت رشد آن استفاده شد. در شکل ۱۴ مسیر توسعه ترک برای زوایای ۰ تا ۷۵ درجه نشان داده شده است.

در شکل ۱۳ تغییرات زاویه انتشار ترک بر حسب زاویه امتداد آن در نسبت‌های مختلف  $a/R$  نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش زاویه ترک، زاویه انتشار آن افزایش می‌یابد. این افزایش تا زاویه قرارگیری حدود ۲۰ درجه سریع‌تر بوده ولی در زوایای بیش از ۲۰ درجه روند آن کاهش می‌یابد. افزایش نسبت  $a/R$  منجر به افزایش اندک زاویه انتشار ترک می‌شود، که برای ترک با زاویه قرارگیری کمتر از ۲۰ درجه تأثیر نسبت  $a/R$  ناچیز بوده و برای مقادیر بیش از ۲۰ درجه تأثیر آن بیشتر است. به صورت کلی افزایش نسبت  $a/R$  منجر به افزایش زاویه انتشار ترک شده که این مسئله در مدل‌سازی‌ها نیز مشخص است.



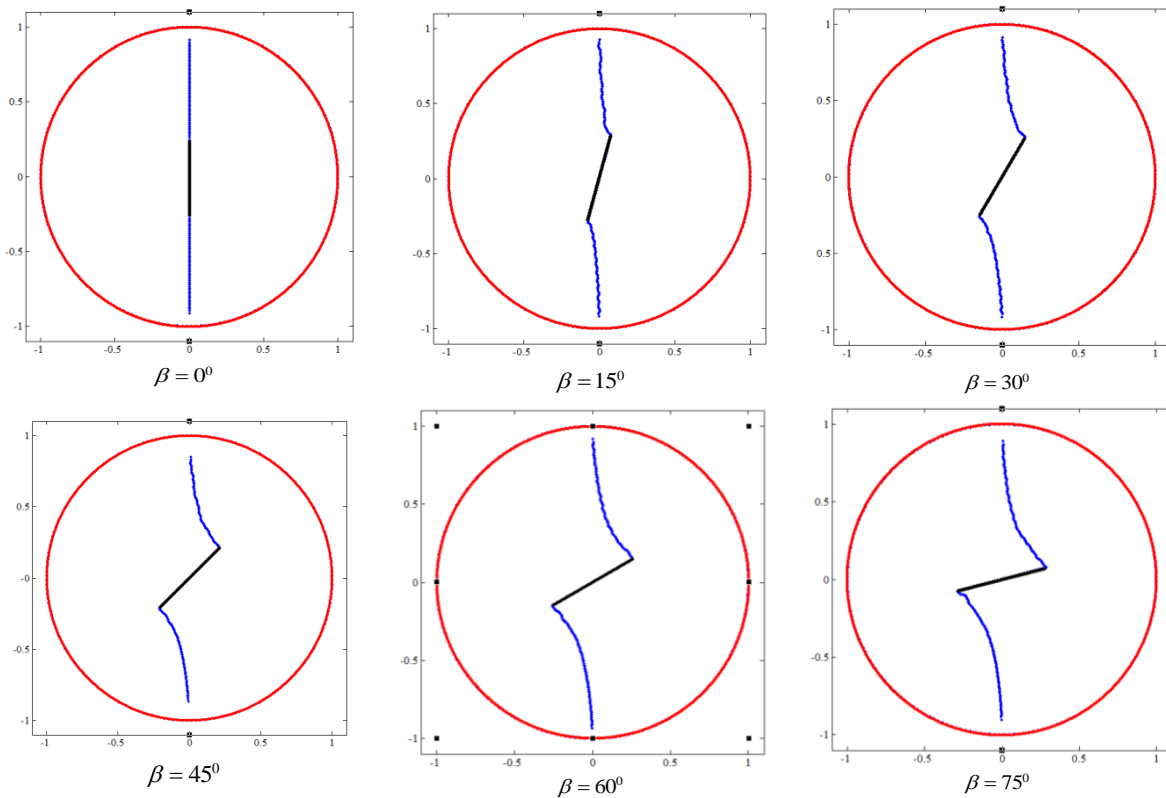
شکل ۱۳: تغییرات زاویه انتشار ترک نسبت به زاویه امتداد آن برای نسبت‌های مختلف  $a/R$

می‌یابد بالاتر بودن فاکتور شدت تنش مد II در نمونه دارای ترک با طول بزرگ‌تر منجر به توسعه بیشتر ترک می‌شود. در ترک دارای طول کمتر همیشه میزان تنش کششی و فشاری نسبت به ترک با طول بیشتر، کمتر است و به همین نسبت نیز فاکتور شدت تنش مد I برای نمونه با طول بیشتر صرف‌نظر از علامت آن همیشه بیشتر است (شکل ۱۰). نتایج نشان می‌دهد که مسیر گسترش ترک با افزایش طول ترک کاهش می‌یابد (شکل ۱۵) که این مسئله منجر به شکست زود هنگام نمونه می‌شود. لازم به ذکر است در طول‌های مختلف ترک، مسیرهای توسعه ترک به گونه‌ای است که با جهت‌گیری مجدد (reorientation) در امتداد محور بارگذاری قرار می‌گیرند و بنابراین اندازه ترک در

نتایج نشان می‌دهد که در زوایای کم ( $\beta=0$ ) مد خالص I (کشش) حاکم بوده و ترک در امتداد اولیه خود شروع به گسترش می‌کند ولی با افزایش زاویه قرارگیری رشد ترک در حالت مد ترکیبی (I-II) انجام می‌شود. با افزایش زاویه ترک، تنش‌های فشاری روی سطح ترک افزایش یافته و تنش‌های کششی نیز به همان نسبت کاهش می‌یابد (شکل ۹).

برای برآورد تأثیر اندازه ترک بر مسیر گسترش آن، مدل‌سازی ترک با طول‌های مختلف (نسبت  $a/R$  برابر با ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۳) انجام شد (شکل ۱۵). نتایج نشان داد که با افزایش طول ترک فاکتور شدت تنش در نوک ترک افزایش می‌یابد (شکل ۱۰) و زمانی که زاویه امتداد ترک افزایش

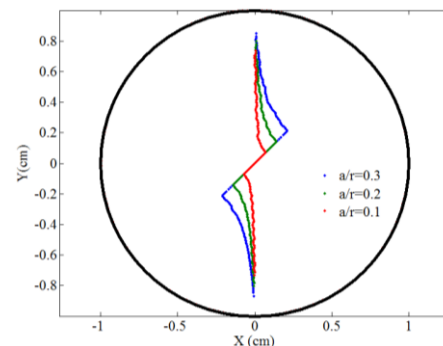
نهایت تأثیر چندانی بر مسیر کلی توسعه ترک ندارد در حالی که زاویه قرارگیری ترک دارای تأثیر بیشتری است.



شکل ۱۴: مسیر گسترش ترک در نمونه برزلی برای ترک با زاویه قرارگیری مختلف

های عددی نشان می‌دهد که افزایش زاویه قرارگیری ترک منجر به افزایش مقاومت و افزایش مسیر توسعه ترک می‌شود. همچنین در زوایای کم، مد I غالب خواهد بود که با افزایش زاویه قرارگیری ترک و بسته به نسبت  $a/R$ ، مد خالص برش در بازه ۲۱ تا ۳۰ درجه رخ خواهد داد. با افزایش زاویه قرارگیری ترک، فاکتور شدت تنش مد I منفی خواهد شد و بنابراین روی نوک ترک تنش فشاری وجود خواهد داشت. در این بازه تأثیر مد II بر گسترش ترک بیشتر خواهد بود تا در زاویه ۹۰ درجه که فاکتور شدت تنش مد II برابر با صفر می‌شود ترک به‌طور کامل متوقف شود.

با افزایش زاویه ترک نسبت به امتداد بارگذاری در نمونه برزلی، زاویه انتشار آن افزایش می‌یابد و افزایش نسبت  $a/R$  نیز منجر به افزایش اندک زاویه انتشار می‌شود.



شکل ۱۵: مسیر گسترش ترک در نمونه برزلی برای ترک با طول‌های مختلف و دارای زاویه قرارگیری یکسان

### ۶- نتیجه‌گیری

به‌منظور بررسی چگونگی گسترش ترک در نمونه‌های دیسکی شکل، مدل‌سازی ترک مرکزی دارای هندسه متفاوت در نمونه برزلی با استفاده از روش المان مرزی انجام شد. نتایج تحلیل-

propagation subjected to compression". Engineering Fracture Mechanics 47(2), 177-189.

[11] Whittaker, B.N., Singh, R.N., Sun, G., 1992. "Rock Fracture Mechanics, Principles, Design and Applications". Elsevier, the Netherlands.

[12] Rao, Q., Sun, Z., Stephansson, O., Li, C., Stillborg, B., 2003. "Shear fracture (Mode II) of brittle rock". Int. J. Rock Mech. Miner. Sci. 40, 355-375.

[13] Ingraffea, A.R., 1981. "Mixed-mode fracture initiation in Indiana Sandstone and Westerly Granite". In: Einstein, H.H. (Ed.), Rock Mechanics from Research to Application. Proceedings of the 22nd US Symposium in Rock Mechanics. MIT, Cambridge, MA, pp. 199-204.

[14] Wang Q.Z., 2010. "Formula for calculating the critical stress intensity factor in rock fracture toughness tests using cracked chevron notched Brazilian disc (CCNBD) specimens". Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 47-1006-1011.

[15] Ayatollahi, M.R., Sistaninia M., 2011. "Mode II fracture study of rocks using Brazilian disk specimens". Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 48,819-826.

[16] Ghazvinian A., 2012. "Mixed mode crack propagation in low brittle rock-like materials", Arab. J. Geosci., DOI 10.1007/s12517-012-0681-8.

[17] Erdogan, F., Sih, G.C., 1963. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, J. Basic Engin. 85, 519-527.

[18] Ingraffea A. R., 1983. "Numerical Modeling of Fracture Propagation", In: Rock Fracture Mechanics, Rossmann H. P. (Editor); Springer Verlagwien; New York, pp. 151-208.

[19] Guo, H., Aziz, N.I., Schmidt, R.A., 1990. "Linear Elastic Crack Tip Modeling by Displacement Discontinuity Method". Engineering Fracture Mechanics, 36, 933-943.

[20] Scavia, C., 1992. "A numerical technique for the analysis of cracks subjected to normal compressive stresses". Int. J. Numer. Methods Eng. 33, 929-942.

[21] Crouch, S.L., 1976 a. "Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method". Int. J. Numer. Methods Eng. 10, 301-343.

[22] Crouch, S. L., 1976 b, Analysis of stresses and displacement around underground excavations-an application of displacement discontinuity method, Geomechanical. Report to the National Science Foundation, University of Minnesota, Minneapolis.

[23] Behnia M. et al., 2012, "The Effect of Layers Elastic Parameters on Hydraulic Fracturing Propagation Utilizing Displacement Discontinuity Method", Journal of Analytical & Numerical Methods in Mining Engineering, No. 3, Vol. 2, 1-13

با افزایش طول ترک، مسیر نهایی توسعه ترک تغییر چندانی نمی‌نماید ولی این مسیر کوتاه‌تر شده و از طرفی افزایش فاکتور شدت تنش متناسب با طول نمونه موجب کاهش مقاومت نمونه خواهد شد.

برنامه عددی توسعه داده شده به خوبی می‌تواند برای مدل‌سازی گسترش ترک در نمونه‌های دیسکی شکل به کار رود و پارامترهای مکانیک شکست نمونه‌های بیان‌شده را به خوبی برآورد کند.

## ۷- مراجع

[1] Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., 1991. "Numerical Fracture Mechanics". Computational Mechanics Publications, Southampton, UK.

[2] Aliabadi, M.H., 1998. "Fracture of Rocks". Computational Mechanics Publications, Southampton, UK.

[3] Scavia, C., 1995. "A method for the study of crack propagation in rock structures". Géotechnique 45(3), 447-463.

[4] Shou, K.J., Crouch, S.L., 1995. "A higher order displacement discontinuity method for analysis of crack problems". Int. J. Rock Mech. Miner. Sci. Geomech. Abstr. 32, 49-55.

[5] Tan, X.C., Kou, S.Q., Lindqvist, P.A., 1996. "Simulation of rock fragmentation by indenters using DDM and fracture mechanics". In: Aubertin, M., Hassani, F., Mitri, H. (Eds.), Rock Mechanics, Tools and Techniques. Balkema, Rotterdam.

[6] Marji M. F., 1997., "Modeling of Cracks in Rock Fragmentation with a Higher Order Displacement Discontinuity Method", PhD Thesis, Mining Engineering Department, Middle East Technical University, Ankara, Turkey.

[7] Behnia M. et al., 2011, "On the crack propagation modeling of hydraulic fracturing by a hybridized displacement discontinuity/ boundary collocation method", Journal of Mining & Environment, Vol.2, No.1, 1-16.

[8] Behnia M. et al., 2014, "Numerical simulation of crack propagation in layered formations", Arab J Geosci., 7:2729-2737.

[9] Behnia M. et al., 2015, "Numerical simulation of interaction between hydraulic and natural fractures in discontinuous media", Acta Geotechnica., Vol. 10, no. 4, 533-546.

[10] Shen, B. and Stephansson, O. 1994. "Modification of the G-criterion for crack

[28] Awaji, H. & Sato, S., 1978. "Combined mode fracture toughness measurement by the disk test", J. Eng. Materls. Tech., 100, 175-182.  
 [29] Sanchez, J. 1979. "Application of the disk test to mode I-II fracture analysis", MS thesis, Mechanical Engineering Department, University of Pittsburgh, Pittsburgh, Pa.  
 [30] Haeri A. et al., 2014. "Experimental and numerical study of crack propagation and coalescence in pre-cracked rock like disks", Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 67, 20-28.

[24] Crouch, S.L., Starfield, A.M., 1990. "Boundary Element Methods in Solid Mechanics". Allen and Unwin, London.  
 [25] Aliabadi, M.H., 1996. "Database of Stress Intensity Factors". Southampton, UK. Computational Mechanics Publications.  
 [26] Cotterell, B., Rice, J.R., 1980. "Slightly curved or kinked cracks". International Journal of Fracture, 16, 155-169.  
 [27] Atkinson, C., Smelser, R. E. & Sanchez, J., 1982. "Combined mode fracture via the cracked Brazilian disk test". Int. J. Fract., 18, No. 4, 279-291.

### پی‌نوشت

- 
- 1 - Mixed Mode
  - 2- boundary element
  - 3 - finite element
  - 4 -Displacement Discontinuity Method
  - 5 -Indirect Boundary Element Method
  - 6 -Higher Order Element
  - 7 -Sub-Element
  - 8-Singularity
  - 9 -In-Plane
  - 10 -Out-of-Plane
  - 11 - Stress Intensity factor
  - 12 - singular
  - 13 - Maximum Tangential Stress Criterion
  - 14 -Maximum Energy Release Rate Criterion
  - 15 - Minimum Strain Energy Density Criterion
  - 16 - Erdogan and Sih
  - 17 - Indirect
  - 18 - Direct
  - 19- Fictitious Stress Method
  - 20 - Displacement Discontinuity Method
  - 21 - Crouch
  - 22 - Influence Functions
  - 23 - Discontinuity Values
  - 24 - Constant Element
  - 25 - harmonic functions
  - 26 - Quadratic Element
  - 27 - Shape Functions
  - 28 - Central Crack
  - 29 -Strain Energy Release Rate
  - 30-Cotterell
  - 31-Rice
  - 32 - Uncracked Brazilian Disk
  - 33 - Brazilian Disk with central crack
  - 34 - Atkinson
  - 35 - Awaji
  - 36 - Sato
  - 37 - Sanchez