

ارزیابی دو معیار شکست مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش و مولفه‌های تنش برای پیش‌بینی جهت انتشار ترک در محیط‌های شبه سنگی

حسین میرزائی نصیرآباد^{۱*}، رضا کاکایی^۲، بهروز حسینی^۳، سید محمد اسماعیل جلالی^۴

۱- استادیار دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، hmirzaii@shahroodut.ac.ir

۲- دانشیار دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک

۳- دانشیار دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده مهندسی عمران و معماری

۴- استادیار دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک

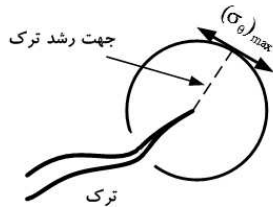
(دریافت ۹ بهمن ۱۳۸۷، پذیرش ۲۸ آذر ۱۳۸۸)

چکیده

معیار شکست مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش که در مطالعات مکانیک شکست رایج است با معیار شکست مبتنی بر مولفه‌های تنش که اخیراً ارائه شده، باهم مقایسه و مزایا و معایب هر یک در پیش‌بینی جهت رشد ترک با استفاده از مثال‌هایی بطور کمی بحث شده است. برای بدست آوردن بردار جابجایی و تانسورهای کرنش و تنش روش عددی بدون مش گالرکین بکار گرفته شده است. برای مدلسازی ترک‌ها معیار روبیت‌پذیری و برای تعیین ضرایب تمرکز تنش حالت ترکیبی کششی و برشی از روش انتگرال اندرکنش M استفاده شده است. دو مثال تحت شرایط حالت ترکیبی به ترتیب تحت بارگذاری برشی و فشاری جهت مقایسه دو معیار تحلیل شده است. نتایج ضرایب تمرکز تنش محاسبه شده با روش بدون مش گالرکین و انتگرال M با نتایج المان محدود و راه‌حل تحلیلی تطابق خوبی دارند. معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش فقط قادر است جهت رشد اولیه ترک را بطور صحیح پیش‌بینی کند حال آنکه معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش قادر است در تمام حالات جهت رشد ترک را پیش‌بینی کند و نتایج آن در مقایسه با نتایج عددی و آزمایشگاهی تطابق مناسب دارد.

کلمات کلیدی

معیار شکست، جهت رشد ترک، ضرایب تمرکز تنش، روش بدون مش گالرکین، انتگرال M.



شکل ۲: جهت رشد ترک بر اساس معیار حداکثر تنش مماسی

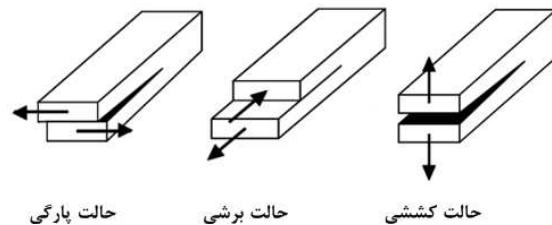
بر پایه مفهوم حداکثر تنش مماسی دو معیار شکست ارائه شده است. معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش که همزمان با ارائه این مفهوم توسعه داده شده [۲] و معیار مبتنی بر مولفه-های تنش که در سال‌های اخیر برای مطالعه رشد و اتصال ترک‌ها بسط داده شده است [۴،۵]. مفهوم ضریب تمرکز تنش را اروین^۱ معرفی کرده است. با استفاده از این کمیت توزیع تنش در نوک ترک قابل بیان است. ضریب تمرکز تنش به دو عامل تنش وارد بر جسم و طول ترک بستگی دارد. این فاکتور برای ترک نوع کششی با K_I و برای ترک نوع برشی با K_{II} نشان داده می‌شود. در کاربردهای عملی برای شرایط هندسی و بارگذاری پیچیده عموماً با استفاده از یک روش عددی میدان جابجایی‌ها و تنش‌ها در دامنه مساله تعیین و با استفاده از روش‌هایی نظیر برون‌یابی تنش [۶]، برون‌یابی جابجایی [۷]، انتگرال J [۸]، انتگرال M [۹] و غیره ضرایب تمرکز تنش محاسبه می‌گردد.

در تحلیل عددی مسایل مکانیک شکست سنگ عموماً از دو روش عددی المان محدود [۱۰]، [۱۱] و المان مرزی [۱۲]، [۱۳]، [۱۴] استفاده می‌شود. این دو روش در برخورد با مسایل رشد ترک با مشکل مش‌بندی مکرر مواجه هستند [۱۵].

در این مقاله روش بدون مش گالرکین بکار گرفته شده و میدان جابجایی‌ها و تنش‌ها در دامنه محیط‌های حاوی ترک تعیین و با استفاده از روش انتگرال M ضرایب تمرکز تنش کششی و برشی محاسبه گردیده است. سپس شرایط رشد و جهت انتشار ترک با دو معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش و مولفه‌های تنش تعیین و بحث شده است. در انتها به منظور اعتبارسنجی مدل‌های روش بدون مش گالرکین و ارزیابی نتایج پیش‌بینی دو معیار شکست، دو مثال در نظر گرفته شده و ابتدا نتایج ضرایب تمرکز تنش محاسبه شده با روش بدون مش با روش المان محدود و راه‌حل تحلیلی مقایسه شده و سپس نتایج پیش‌بینی دو معیار شکست باهم مقایسه و بحث شده است.

۱- مقدمه

سازه‌های مختلف مهندسی با کاربری‌های مختلف در محیط‌های سنگی احداث می‌شوند. محیط‌های سنگی عموماً دارای درزه و ترک بوده و رفتار مکانیکی آن عمدتاً توسط این ناپیوستگی‌ها کنترل می‌شود. با اعمال بار بر محیط سنگی، در نوک این ترک‌ها تمرکز تنش بوجود آمده و در صورت غلبه بر پارامترهای مقاومتی سنگ، رشد کرده و منجر به گسیختگی محیط می‌گردد. چگونگی رشد ترک و تعیین جهت انتشار آن در حوزه مکانیک شکست سنگ مطالعه می‌شود. مکانیک شکست سنگ در زمینه‌های مختلف مهندسی سنگ نظیر آتشیاری، شکست هیدرولیکی و تعیین تنش برجا، خردایش مکانیکی، تحلیل پایداری شیب، استحصال انرژی گرمایی زمین، خواص انتقال سیال توده‌سنگ درزه‌دار، مدلسازی رفتار وابسته به زمان شکست سنگ و ... کاربرد دارد [۱]. بسته به نوع بارگذاری و هندسه شکستگی‌های سنگ، مطابق شکل ۱ یک شکستگی به صورت یکی از سه حالت اصلی و یا ترکیبی از آنها گسترش می‌یابد. حالت اول، حالت بازشدگی؛ حالت دوم، حالت لغزشی یا برشی و حالت سوم، حالت پارگی است [۱].



شکل ۱: سه حالت اصلی انتشار ترک [۱]

در مکانیک شکست کاربرد سه معیار شکست حداکثر تنش مماسی، حداکثر نرخ رهایی انرژی کرنشی و حداقل دانسیته انرژی کرنشی رایج است [۲] که در این بین، معیار حداکثر تنش مماسی بیشترین کاربرد را دارا است. بر مبنای معیار حداکثر تنش مماسی، رشد ترک در جهتی است که تنش مماسی روی محیط دایره‌ای به مرکز نوک ترک و به شعاع کوچک، حداکثر باشد (شکل ۲). در این معیار رشد ترک در حالت کششی در نظر گرفته شده است و بر این اساس تنش-های برشی به خودی خود در رشد ترک بی‌اثر هستند ولی در میزان بازشدگی ترک و جهت بازشدگی آن اثر دارند [۳].

همانطور که بحث شد بر مبنای مفهوم حداکثر تنش مماسی (شکل ۲) رشد ترک در راستای عمود بر حداکثر تنش اصلی رخ می‌دهد. بنابراین ترک در نوک آن در راستای θ ای شروع به رشد می‌کند که مقدار تنش برشی صفر باشد، پس می‌توان داشت:

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] = 0$$

این معادله دو جواب دارد:

$$\theta = \pm \pi \quad \text{غیر قابل قبول} \quad (5)$$

$$[K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] = 0 \quad (6)$$

که در آن θ زاویه‌ای است که مرکز آن در نوک ترک واقع شده و نسبت به امتداد خط ترک در جلوی آن اندازه‌گیری می‌شود. با حل معادله بالا θ از رابطه زیر بدست می‌آید [۱۷].

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \quad (7)$$

۲-۲- معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش

در سال‌های اخیر برای مطالعه رشد و اتصال ترک‌ها در محیط‌های سنگی یا شبه‌سنگی معیار جدیدی که بر پایه مولفه‌های تنش توسعه داده شده، ارائه شده است [۵] و [۱۸]. در این معیار مطابق شکل ۳ روی محیط دایره‌ای به مرکز نوک ترک و به شعاع کوچک (شعاع زون پلاستیک مصالح) مولفه‌های تنش مماسی (σ_θ) و تنش برشی ($\tau_{r\theta}$) محاسبه می‌شود. با استفاده از این مولفه‌ها و پارامترهای مقاومتی که عبارتند از تنش مماسی بحرانی (مقاومت کششی) و تنش برشی بحرانی (مقاومت برشی)، معیار فوق بصورت زیر بیان می‌شود [۱۸]:

رشد ترک در مود کششی:

$$(\sigma_\theta)_{\min} \Big|_{r=r_0} = (\sigma_\theta)_{\text{critical}} \Big|_{r=r_0} = \sigma_{\text{crit}} \quad (8)$$

رشد ترک در مود برشی:

$$(\tau_{r\theta})_{\max} \Big|_{r=r_0} = (\tau_{r\theta})_{\text{critical}} \Big|_{r=r_0} = \tau_{\text{crit}} \quad (9)$$

۲- معیارهای رشد ترک بر پایه اصل حداکثر تنش مماسی

۱-۲- معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش

همانطور که اشاره شد یک ترک در حالت دو بعدی در حالت کششی و یا در حالت برشی رشد می‌کند. برای تشخیص حالت رشد ترک با استفاده از ضرایب تمرکز تنش از رابطه زیر استفاده می‌شود [۵].

$$\frac{K_{II}}{K_I} < \frac{K_{IIC}}{K_{IC}} \quad \text{حالت کششی}$$

$$\frac{K_{II}}{K_I} > \frac{K_{IIC}}{K_{IC}} \quad \text{حالت برشی} \quad (1)$$

که در آن K_I و K_{II} ضرایب تمرکز تنش و K_{IC} و K_{IIC} چقرمگی شکست یا ضرایب تمرکز تنش بحرانی می‌باشند که جزء خواص مقاومتی مصالح سنگی می‌باشند.

معیار رشد ترک در حالت ترکیبی (حالت ترکیبی بیانگر شرایطی است که در نوک ترک تمرکز تنش حالت کششی و برشی بوجود می‌آید و پتانسیل رشد در هر دو حالت کششی و برشی وجود دارد) و بر حسب ضرایب تمرکز تنش بصورت زیر می‌باشد [۳]:

$$\left(\frac{K_I}{K_{IC}} \right)^\lambda + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIC}} \right)^\mu = 1 \quad (2)$$

که در آن λ و μ ضرایب وابسته به خواص مواد هستند. مقادیر $\lambda = \mu = 2.25$ بهترین برازش را با نتایج آزمایشگاهی داشته‌اند [۱۶]. در حالت ترکیبی معادلات تنش در حوالی نوک ترک در مختصات قطبی به صورت زیر است [۳]:

$$\sigma_r = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{5}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} +$$

$$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$J = \sum_{i=1}^n w(x, x_i) [u^h(x_i) - u_i]^2 \quad (11)$$

که در آن $w(x - x_i)$ تابع وزن است که در حوزه تاثیر گره i تعریف می‌شود، u_i مقدار گرهی در نقطه x_i و n تعداد گره‌ها در حوزه تاثیر نقطه x است. تابع وزن نقش تاثیر گرهی را دارد و در تقریب MLS نقش مهمی بازی می‌کند. در این مقاله از تابع وزن اسپلاین مرتبه سوم استفاده شده که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$w(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3 & \text{for } s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3 & \text{for } \frac{1}{2} < s < 1 \\ 0 & \text{for } s \geq 1 \end{cases} \quad (12)$$

که پارامتر وزن s فاصله نرمال شده است: $s = \frac{|x - x_i|}{r_0}$ شعاع حوزه تاثیر است. با ثابت بودن تغییرات J نسبت به $a(x)$ به دست می‌آید:

$$a(x) = A^{-1}(x)B(x)u \quad (13)$$

$$[A(x)]_{IJ} = \sum_{i=1}^n w(x, x_i) p_I(x_i) p_J(x_i), I, J = 1, 2, \dots, m, \quad (14)$$

$$[B(x)]_{IJ} = w(x, x_j) p_I(x_j), J = 1, 2, \dots, n, I = 1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

$$u^T = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (16)$$

با جایگزینی $a(x)$ در معادله ۱۰ خواهیم داشت:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i \quad (17)$$

تابع شکل $\phi_i(x)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^n p_j(x) (A^{-1}(x)B(x))_{ji} \quad (18)$$

۳-۲ - فرم مرتبه پائین گالرکین برای مسائل الاستوستاتیک

معادلات حاکم بر مسائل الاستوستاتیک در دامنه Ω که با مرز Γ محدود شده است، به صورت زیر می‌باشد [۱۹]:

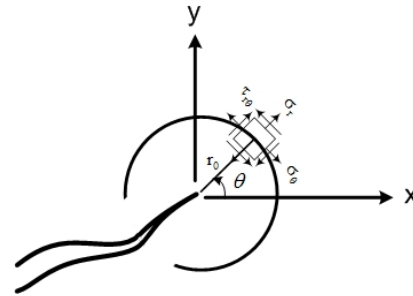
$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (19)$$

با شرایط مرزی:

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u, \quad (20)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (21)$$

که در آن σ تانسور تنش، b نیروهای حجمی، \bar{u} جابجائی داده شده در مرز Γ_u ، \bar{t} نیروی سطحی داده شده در مرز Γ_t و n بردار نرمال رو به بیرون مرز مسئله است.



شکل ۳: تشریح معیار شکست مبتنی بر مولفه‌های تنش

در این معیار در هر وضعیت از شرایط هندسی و بارگذاری، دو مولفه کششی و برشی تنش در نقاط مختلف محیط دایره (شکل ۳) محاسبه شده و مقادیر حداکثر این مولفه‌ها تعیین می‌گردد. هر یک از مولفه‌ها که زودتر به مقدار بحرانی خود برسد، ترک در حالت متناظر با آن مولفه رشد می‌کند و جهت رشد ترک در راستایی خواهد بود که مقدار تنش متناظر حداکثر است.

مقادیر بحرانی مولفه‌های تنش از خواص مصالح بوده و به طور آزمایشگاهی تعیین می‌شوند. مقدار بحرانی مولفه کششی تنش، مقاومت کششی و مقدار بحرانی مولفه برشی تنش، چسبندگی مصالح است.

۳- روش بدون مش گالرکین

روش بدون مش گالرکین یکی از متداول‌ترین روش‌های بدون مش است و در سال ۱۹۹۴ توسط بلیچکو ارائه شده است [۱۹]. این روش اساساً دو جنبه دارد: ساختن تقریب بدون مش با استفاده از تکنیک حداقل مربعات متحرک (MLS) و تقریب عددی معادلات حاکم با فرمول بندی مرتبه پائین گالرکین.

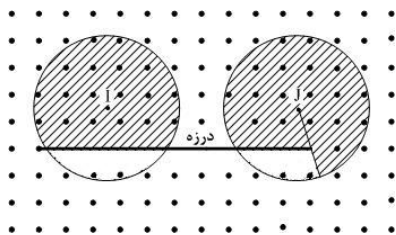
۳-۱- تقریب MLS

اگر $u(x)$ متغیر میدان در حوزه Ω و u^h تقریب محلی آن باشد، طبق مطالعات لنکستر و همکارانش [۱۹]، تقریب محلی u^h به صورت ضرب داخلی بردار چند جمله‌ای پایه $P(x)$ و بردار ضرایب $a(x)$ بیان می‌شود:

$$u^h = P^T(x) \cdot a(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) \quad (10)$$

m تعداد جمله‌ها در توابع پایه چند جمله‌ای است. در مسائل دو بعدی عموماً توابع پایه خطی $P^T = (1, x, y)$ استفاده می‌شود. اگر مقادیر $x_i, y_i, \dots, i = 1, \dots, n$ در مجموعه‌ای از گره‌ها معلوم باشد، بردار $a(x)$ را با مینیمم کردن نرُم خطای L_2 گسسته و وزن دار می‌توان بدست آورد. نرُم خطای L_2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

هندسی (ترک‌ها، حفره‌ها، لبه‌های داخلی و خارجی) بعنوان یک سطح تیره در نظر گرفته می‌شود. وقتی برای ساختن توابع شکل، گره‌های واقع در حوزه تاثیر یک نقطه خاص تعیین می‌شوند، تمامی این گره‌ها بصورت خط راست به نقطه مورد نظر وصل می‌شوند. این خطوط راست بصورت اشعه‌هایی قابل تصور هستند، اگر اشعه‌ای سطح تیره (ناپیوستگی) را قطع کند، گره متناظر آن از حوزه تاثیر نقطه مورد نظر حذف می‌گردد. بعنوان مثال در شکل ۴ حوزه تاثیر نقاط I و J که در مجاورت ترک واقع شده‌اند بصورت قسمت هاشور خورده نشان داده شده است. فقط گره‌های واقع در قسمت هاشور خورده برای تشکیل توابع شکل استفاده می‌شوند.



شکل ۴: حوزه تاثیر گره‌های I و J، واقع در مجاورت ترک

۵ - محاسبه ضرایب تمرکز تنش

تمرکز تنش در نوک ترک با ضریب تمرکز تنش بیان می‌شود. ضریب تمرکز تنش یکی از مهمترین پارامترهای مکانیک شکست بوده و قادر است میدان و توزیع تنش را در اطراف نوک ترک برحسب بار اعمالی و اندازه و شکل ترک بیان نماید. در مطالعات عددی برای محاسبه ضرایب تمرکز تنش از انتگرال مستقل از مسیر J استفاده می‌شود ولی در حالت مود ترکیبی تفکیک ضرایب تمرکز تنش مود کششی و مود برشی از مولفه‌های انتگرال J مشکل است [۲۰] و برای محاسبه ضرایب تمرکز تنش عموماً روش تجزیه مولفه‌ها [۲۱] و یا روش انتگرال اندرکنش M [۹] بکار گرفته می‌شود. در این مقاله روش انتگرال M استفاده شده است. در این روش در حوالی نوک ترک مطابق شکل ۵ مسیر دلخواهی انتخاب و روی مسیر گره-هایی قرار داده می‌شود. میدان‌های جابجایی، کرنش و تنش اصلی و کمکی در گره‌های مذکور تعیین و انتگرال اندرکنش M بصورت زیر محاسبه می‌گردد [۹].

$$M = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_{ik}^{\text{aux}} \varepsilon_{ik}^{\text{aux}} + \sigma_{ik}^{\text{aux}} \varepsilon_{ik}) \delta_{ij} - (\sigma_{ij}^{\text{aux}} u_{i,1}^{\text{aux}} + \sigma_{ij}^{\text{aux}} u_{i,1}^{\text{aux}}) \right\} n_j d\Gamma \quad (31)$$

که در آن Γ مسیر انتگرال M، n بردار یکه عمود بر مرز، و (σ, ε, u) و $(\sigma^{\text{aux}}, \varepsilon^{\text{aux}}, u^{\text{aux}})$ بترتیب میدان‌های جابجایی،

با اعمال شرایط مرزی اساسی با استفاده از ضرایب لاگرانژ [۱۵]، فرم مرتبه پائین معادله تعادل به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_{\Omega} \delta(\nabla_s v^T) : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta v^T \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_1} \delta v^T \cdot \bar{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_0} \delta v^T \cdot (u - \bar{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_0} \delta v^T \cdot \lambda d\Gamma = 0 \quad (22)$$

$$\forall \delta v \in H^1, \delta \lambda \in H^0$$

که δv تابع آزمون، λ ضرایب لاگرانژ، H^1 و H^0 به ترتیب فضای هیلبرت مرتبه صفر و یک هستند. معادله فوق معادله تعادل ۱۹ و شرایط مرزی ۲۰ و ۲۱ را اقتناع می‌کند.

برای بدست آوردن معادلات گسسته از معادله مرتبه پائین ۲۲، راه حل تقریبی u و تابع آزمون δv طبق معادله ۱۷ ساخته شده و به همراه توابع درونیاب لاگرانژ در معادله ۲۲ جایگزین می‌شوند. معادلات گسسته نهایی بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \quad (23)$$

ماتریس‌ها و بردارها در معادله فوق به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[K]_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T D B_j d\Omega \quad (24)$$

$$G_{ik} = - \int_{\Gamma_0} \phi_i N_k d\Gamma \quad (25)$$

$$f = \int_{\Omega} \Phi_1 b d\Omega + \int_{\Gamma_1} \Phi_1 \bar{t} d\Gamma \quad (26)$$

$$q = - \int_{\Gamma_0} N_k \bar{u} d\Gamma \quad (27)$$

$$[B]_i = \begin{bmatrix} \phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \phi_{i,y} \\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$N_k = \begin{bmatrix} N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \quad (29)$$

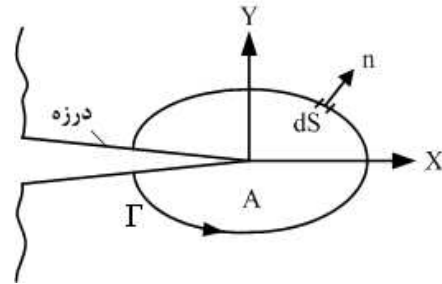
$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \text{ for plane stress} \quad (30)$$

که E و ν بترتیب ضریب کشسانی و نسبت پواسون مصالح هستند. با حل معادله ۲۳، بردار u (مقادیر جابجایی در گره‌ها) بدست می‌آید و با استفاده از مقادیر جابجایی‌ها مولفه‌های کرنش و تنش محاسبه می‌شوند.

۴ - مدلسازی ترک در روش بدون مش گالرکین

در روش بدون مش گالرکین ناپیوستگی‌های هندسی مانند ترک‌ها و درزه‌ها با استفاده از روش‌های متعددی نظیر معیار رویت‌پذیری، معیار انکسار و یا معیار شفافیت، مدلسازی می‌شوند [۲۰]. در این مقاله برای مدلسازی درزه‌های سنگ معیار رویت‌پذیری بکار گرفته شده است. در این معیار هر مرز

کرنش و تنش اصلی و کمکی در گره‌های روی مسیر انتگرال-گیری هستند. میدان جابجایی، کرنش و تنش اصلی از تحلیل عددی مساله بدست می‌آیند و برای تعیین میدان‌های کمکی از توابع موجود استفاده می‌شود.



شکل ۵: مسیر انتگرال M در حوالی نوک ترک

رابطه بین انتگرال M و ضرایب تمرکز تنش اصلی و فرعی بصورت زیر می‌باشد:

$$M = \frac{2}{E'} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) \quad (32)$$

که در آن K_I و K_{II} ضرایب تمرکز تنش کششی و برشی اصلی و K_I^{aux} و K_{II}^{aux} ضرایب تمرکز تنش کششی و برشی فرعی هستند. برای محاسبه ضریب تمرکز تنش مود I، ضریب تمرکز تنش فرعی مود I برابر یک و ضریب تمرکز تنش فرعی مود II برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین از رابطه زیر می‌توان مقدار K_I از رابطه زیر بدست می‌آید [۹].

$$K_I = \frac{E'}{2} M (K_I^{aux} = 1.0, K_{II}^{aux} = 0.0) \quad (33)$$

همچنین برای محاسبه ضریب تمرکز تنش مود II، ضریب تمرکز تنش فرعی مود II برابر یک و ضریب تمرکز تنش فرعی مود I برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین از رابطه زیر می‌توان مقدار K_{II} را محاسبه نمود [۹].

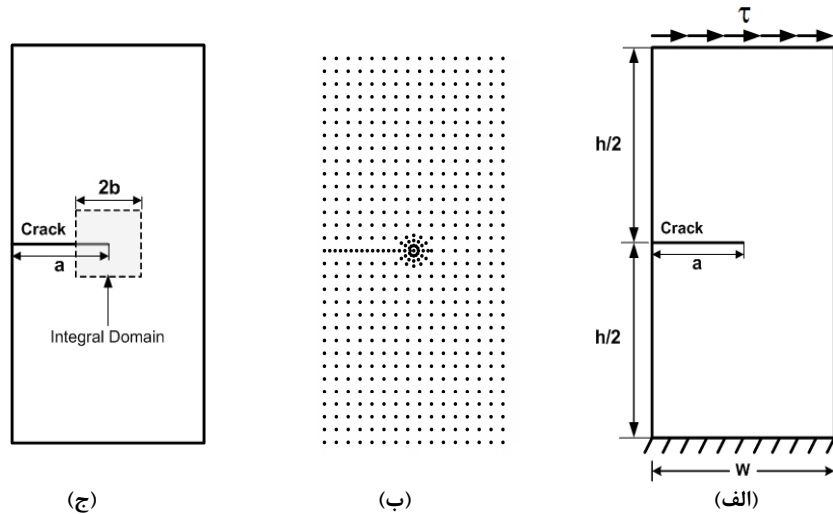
$$K_{II} = \frac{E'}{2} M (K_I^{aux} = 0.0, K_{II}^{aux} = 1.0) \quad (34)$$

۶- مثال‌های عددی

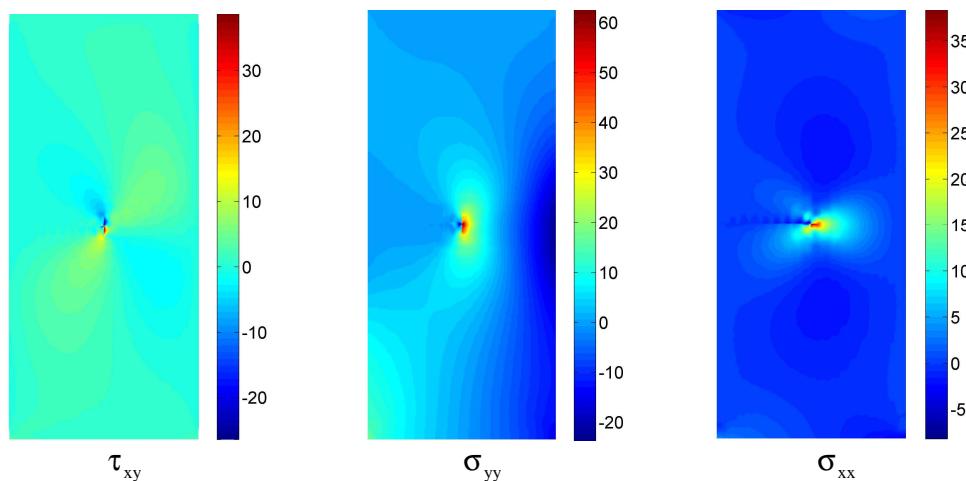
برای ارزیابی نتایج روش بدون مش گالرکین و انتگرال M و مقایسه نتایج دو معیار شکست در پیش‌بینی جهت رشد ترک، دو مثال در نظر گرفته شده است. در هر مورد میدان جابجایی-ها و تنش‌ها در دامنه محیط‌های ترک‌دار تعیین شده و با استفاده از روش انتگرال M ضرایب تمرکز تنش موده‌های

۶-۱- نمونه حاوی ترک لبه‌ای تحت بار برشی

در این مثال مطابق شکل ۶- الف نمونه‌ای فرضی به ابعاد 160×70 میلی‌متر مربع که حاوی ترک لبه‌ای و افقی به طول ۳۵ میلی‌متر است از قسمت پایین به تکیه‌گاه ثابت متصل و از قسمت بالا تحت تنش برشی ۱ مگاپاسکال قرار گرفته است. ضریب الاستیسیته و پواسون این نمونه به ترتیب برابر ۳۰ گیگاپاسکال و ۰/۲۵ می‌باشند. این مثال توسط ویلسون^۲ با روش المان محدود [۲۲] و توسط راثو^۳ و رحمان^۴ با روش ترکیبی المان محدود و روش بدون مش گالرکین [۲۳] حل شده است. برای مدل‌سازی با روش بدون مش گالرکین ۵۲۶ گره در دامنه مساله در نظر گرفته شد. مطابق شکل ۶- ب گره‌ها در اطراف نوک ترک به صورت شعاعی و در سایر نقاط دامنه بطور شبکه مربعی منظم توزیع شده‌اند. برای تعیین ضرایب تمرکز تنش با روش انتگرال M، مسیر انتگرال مطابق شکل ۶- ج و اندازه ضلع این مسیر مربعی ۰/۲ طول ترک در نظر گرفته شده است. بعد از مدل‌سازی و حل دستگاه معادلات حاکم بر مساله رابطه ۲۳، بردار جابجایی تعیین شده و سپس تانسور کرنش و تنش محاسبه می‌شوند. مولفه‌های تانسور تنش در دامنه این مساله در شکل ۷ نشان داده شده است. با محاسبه میدان جابجایی، کرنش و تنش، ضرایب تمرکز تنش در نوک ترک با استفاده از انتگرال M محاسبه شده و با نتایج روش المان محدود [۲۲] و ترکیب دو روش بدون مش گالرکین و روش المان محدود [۲۳] در جدول ۱ مقایسه شده است. نتایج روش‌های مذکور تطابق خیلی خوبی باهم دارند. با رشد ترک و تغییر هندسه مساله، ضرایب تمرکز تنش در نوک ترک نیز تغییر می‌کند. برای سه مرحله از رشد ترک ضرایب تمرکز تنش محاسبه شده و در جدول ۲ درج شده است. افزایش طول ترک در هر مرحله ۵ میلی‌متر در نظر گرفته شده است.



شکل ۶: نمونه حاوی یک درزه افقی لبه‌ای که تحت بارگذاری برشی قرار گرفته است (الف) هندسه نمونه. (ب) آرایش گره‌ها در دامنه مساله (ج) مسیر انتگرال M



شکل ۷: توزیع مولفه‌های تنش در دامنه نمونه حاوی ترک لبه‌ای افقی

همانطور که جدول ۲ نشان می‌دهد با رشد ترک به ازای مقدار ثابت تنش اعمالی بر نمونه، ضرایب تمرکز تنش افزایش می‌یابند یعنی ترک در حالت ناپایدار رشد می‌کند. مطابق شکل ۸ - الف، در هر مرحله از رشد ترک، زاویه رشد ترک نسبت به خط افق اندازه‌گیری می‌شود. با استفاده از دو معیار ذکر شده، زاویه رشد ترک برای سه مرحله از انتشار ترک پیش‌بینی شده و در جدول ۳ نشان داده شده است. برای این مثال مسیر واقعی رشد ترک بطور شماتیک در شکل ۸- ب نشان داده شده است [۲۳]. مطابق شکل مذکور زاویه انشعاب ترک (θ) روند کاهشی دارد. نتایج جدول ۳ بیانگر اینست که پیش‌بینی معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش صحیح بوده و نتایج معیار ضرایب تمرکز تنش فقط در مرحله اول رشد ترک معتبر است. دلیل

جدول ۱: مقایسه نتایج ضرایب تمرکز تنش روش بدون مش گالرکین و المان محدود

روش عددی	K_I (MPa.cm ^{1/2})	K_{II} (MPa.cm ^{1/2})
نتایج این مطالعه	۳۵/۳۸	۴/۲۵
روش المان محدود [۲۲]	۳۴	۴/۵۵
ترکیب المان محدود و روش بدون مش [۲۳]	۳۳/۶۳	۴/۵۳

جدول ۲: ضرایب تمرکز تنش در نوک ترک در مراحل مختلف رشد

مراحل رشد ترک	K_I (MPa.cm ^{1/2})	K_{II} (MPa.cm ^{1/2})
قبل از مرحله اول رشد	۳۵/۳۸	۴/۲۵
قبل از مرحله دوم رشد	۴۶/۴۸	۹/۶۷
قبل از مرحله سوم رشد	۵۳/۴۴	۱۳/۵

جدول ۳: مقایسه نتایج دو معیار در پیش‌بینی جهت رشد ترک

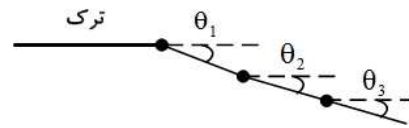
θ_3	θ_2	θ_1	معیار شکست
۵۲	۳۶	۱۴	معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش
۱۶	۱۶	۱۹	معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش

۶-۲- نمونه سنگی حاوی ترک شیب‌دار تحت بار فشاری

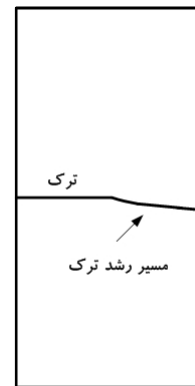
در این مثال مطابق شکل ۹- الف نمونه‌ای به ابعاد 200×100 میلی‌متر مربع که حاوی یک ترک شیب‌دار با شیب 45° درجه و به طول 20 میلی‌متر است در راستای محور طولی تحت تنش فشاری 10 مگاپاسکال قرار گرفته است. ضریب الاستیسیته و پواسون این نمونه به ترتیب برابر 50 گیگاپاسکال و 0.25 می‌باشد. برای مدل‌سازی با روش بدون مش گالرکین 842 گره در دامنه مساله در نظر گرفته شد. مطابق شکل ۹- ب گره‌ها در اطراف دو سر ترک به صورت شعاعی و در سایر نقاط دامنه بطور شبکه مربعی منظم توزیع شده‌اند. برای تعیین ضرایب تمرکز تنش با روش انتگرال M ، مسیر انتگرال مطابق شکل ۹- ج و اندازه ضلع این مسیر مربعی، 0.2 طول ترک ($b = 0.2a$) در نظر گرفته شده است.

با مدل‌سازی و حل مساله با روش بدون مش گالرکین، بردار جابجایی و تانسورهای تنش و کرنش محاسبه می‌شوند. توزیع مولفه‌های تانسور تنش در دامنه این مساله در شکل ۱۰ نشان داده شده است.

این مسئله این است که ضابطه تعیین زاویه رشد در معیار ضرایب تمرکز تنش (رابطه ۷) از روابط تحلیلی ۳ منتج شده است و این روابط برای حالت ساده و اولیه بسط داده شده و وقتی ترک رشد می‌کند و حالت غیر خطی پیدا می‌کند و هندسه مساله تغییر می‌کند، روابط مذکور صحت خود را از دست می‌دهند.

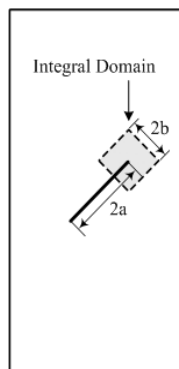


(الف)

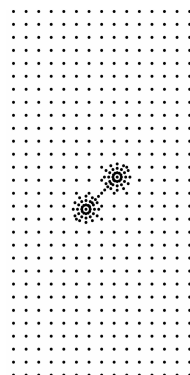


(ب)

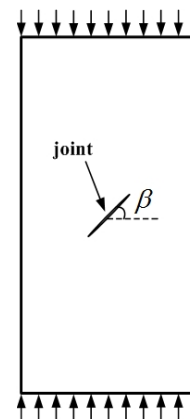
شکل ۸: پیش‌بینی جهت رشد ترک در نمونه حاوی ترک لبه‌ای. (الف) مراحل مختلف رشد ترک و زاویه انتشار آن نسبت به خط افق (ب) شکل شماتیک مسیر رشد ترک شیب‌دار



(ج)

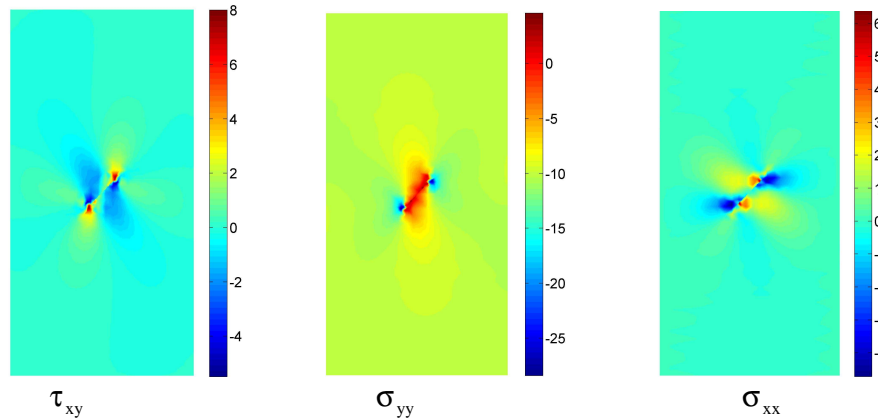


(ب)



(الف)

شکل ۹: مدل‌سازی نمونه حاوی ترک شیب‌دار تحت بارگذاری فشاری. (الف) هندسه نمونه (ب) آرایش گره‌ها در دامنه مساله (ج) مسیر انتگرال M .



شکل ۱۰: توزیع مولفه‌های تنش در دامنه نمونه حاوی ترک شیب‌دار

جدول ۴: مقایسه نتایج ضرایب تمرکز تنش بدون مش گالرکین و راه‌حل تحلیلی

روش عددی	$K_I (MPa.cm^{1/2})$	$K_{II} (MPa.cm^{1/2})$
نتایج این مطالعه	۹/۱۱	۹/۱۱
روش تحلیلی	۸/۸۶	۸/۸۶

در این مثال با استفاده از نتایج مدل‌سازی بدون مش گالرکین، معیار ضرایب تمرکز تنش، مقدار زاویه رشد ترک را نسبت به خط ترک ۹۰ درجه پیش‌بینی می‌کند یعنی پیش‌بینی می‌کند ترک عمود بر راستای خود از دو نوک آن گسترش می‌یابد. با همان نتایج، معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش زاویه رشد را ۸۸

با تعیین میدان جابجایی، کرنش و تنش و با استفاده از روش انتگرال M ، ضرایب تمرکز تنش در نوک ترک محاسبه شده و در جدول ۴ با نتایج روش تحلیلی مقایسه شده است. برای بدست آوردن ضرایب تمرکز تنش تحلیلی از روابط زیر استفاده شده است [۲]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta \quad (۳۵)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta \quad (۳۶)$$

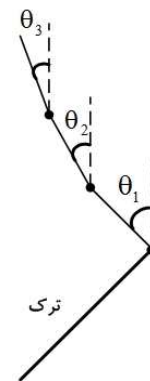
که در آن a نصف طول ترک، σ تنش اعمال شده بر نمونه و β شیب ترک می‌باشد. طبق جدول ۴ نتایج دو روش تطابق خیلی خوبی باهم دارند.



(ج)



(ب)



(الف)

شکل ۱۱: پیش‌بینی جهت رشد ترک در نمونه حاوی ترک شیب‌دار تحت بار فشاری. الف) مراحل مختلف رشد ترک و زاویه انتشار آن نسبت به خط قائم ب) شکل شماتیک پیش‌بینی عددی مسیر رشد ترک شیب‌دار ج) مسیر رشد ترک در یک نمونه گچی یا ابعاد $۳ \times ۱۰ \times ۲۰$ سانتی‌متر مکعب و حاوی ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه و به طول ۲ سانتی‌متر

۲ سانتی متر با قرار دادن یک صفحه نازک فولادی در داخل دوغاب گچ ایجاد شده است. مسیر رشد ترک در این نمونه گچی تحت بار فشاری در شکل ۱۱- ج نشان داده شده است. نمونه گچی و دستگاه بارگذاری فشاری در شکل ۱۲ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۱۱ مشاهده می شود مسیر رشد ترک در نمونه گچی انطباق بسیار خوبی با پیش بینی مدل عددی و معیار مبتنی بر مولفه های تنش دارد. این مقایسه بیانگر این است که جنس مصالح در مسیر رشد ترک تاثیر نداشته و فقط بر میزان باری که منجر به رشد ترک می شود، موثر است.



شکل ۱۲: نمونه گچی تحت بارگذاری فشاری تک محوری

درجه پیش بینی می کند که تقریباً همان نتیجه معیار ضرایب تمرکز تنش است. با رشد ترک، هندسه خطی ترک کاملاً تغییر می کند و در این شرایط دقت ضرایب تمرکز تنش محاسبه شده با روش انتگرال M با توجه به مقادیر مولفه های تنش در حوالی نوک ترک قابل قبول نیست. لازم به ذکر است در مطالعات مختلف با روش انتگرال M به تعیین ضرایب تمرکز تنش در نوک ترک با هندسه غیر خطی و پیچیده پرداخته نشده است. برخلاف معیار ضرایب تمرکز تنش، معیار مبتنی بر مولفه تنش از هندسه ترک مستقل بوده و مقدار زاویه رشد را در مراحل مختلف رشد بطور صحیح پیش بینی می کند. برای سه مرحله از رشد ترک و برای نوک بالای ترک (شکل ۱۱- الف) مقدار حداکثر تنش مماسی (کششی) در نوک ترک و زاویه بین راستای حداکثر تنش مماسی و راستای قائم (جهت رشد ترک نسبت به راستای قائم) تعیین و در جدول ۵ درج شده است. در هر سه مرحله مقدار تنش اعمالی بر نمونه ۱۰ مگاپاسکال بوده و افزایش طول ترک در هر مرحله ۵ میلی متر در نظر گرفته شده است.

جدول ۵: مقدار حداکثر تنش مماسی و جهت رشد در مراحل مختلف

رشد ترک

مراحل رشد ترک	حداکثر تنش مماسی (MPa)	زاویه رشد ترک نسبت به راستای قائم (θ)
مرحله اول رشد	۱۲/۸	۴۳
مرحله دوم رشد	۹/۲	۳۳
مرحله سوم رشد	۵/۲۵	۴

۷- بحث و نتیجه گیری

در این مقاله دو معیار شکست، معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش و معیار مبتنی بر مولفه های تنش معرفی و ارزیابی شده اند. برای تعیین میدان جابجایی، کرنش و تنش در دامنه نمونه های سنگی ترک دار، روش عددی بدون مش گالرکین استفاده شده است. برای مدلسازی شکستگی های سنگ معیار رویت پذیری و برای تعیین ضرایب تمرکز تنش، روش انتگرال M بکار گرفته شده است. برای ارزیابی نتایج بدست آمده، دو مثال: نمونه حاوی ترک لبه ای تحت تنش برشی و نمونه حاوی ترک شیب دار تحت بار فشاری در نظر گرفته شد و ضرایب تمرکز تنش محاسبه شده با روش بدون مش گالرکین و انتگرال M به ترتیب با نتایج المان محدود و روش تحلیلی مقایسه گردیده است که نتایج روشها تطابق خوبی را باهم نشان می دهند. مقایسه نتایج پیش بینی دو معیار مذکور در تحلیل

همانطور که جدول ۵ نشان می دهد با رشد ترک به ازای مقدار ثابت تنش اعمالی بر نمونه، مقدار حداکثر تنش مماسی کاهش می یابد یعنی ترک در حالت پایدار رشد می کند و برای رشد بیشتر ترک نیاز است که تنش اعمالی بر نمونه افزایش یابد. در این مثال مسیر رشد پیش بینی شده با معیار مولفه های تنش بطور شماتیک در شکل ۱۱- ب نشان داده شده است. مطابق شکل ترک عمود بر راستای خود رشد کرده و بتدریج راستای آن به راستای بارگذاری متمایل می شود. در این مثال مسیر رشد ترک مستقل از جنس نمونه است و به هندسه مساله وابسته است. برای ارزیابی نتایج پیش بینی مدل بدون مش گالرکین و معیار مبتنی بر مولفه های تنش، یک نمونه از جنس گچ و با هندسه این مثال تهیه و تحت بار فشاری قرار گرفت. برای تهیه نمونه گچی از مخلوط گچ و آب با نسبت اختلاط ۳ به ۲ استفاده شده و ترک شیب دار با شیب ۴۵ درجه و به طول

[۷] میرزائی نصیرآباد، حسین؛ کاکائی، رضا؛ حسینی، بهروز؛ ۱۳۸۷؛ "تعیین ضریب تمرکز تنش مود کششی شکستگی‌های سنگ با استفاده از روش بدون مش گالرکین و برون‌یابی جابجائی"، دومین کنفرانس مهندسی معدن ایران، تهران. ص ۱۸۳-۱۹۰.

[8] Mirzaei, H. Kakaie, R. and Hassani, B.; 2008; "Determination of Stress Intensity Factors for Jointed Brittle Rock Medium Using Element Free Galerkin Method", 5th Asian Rock Mechanics Symposium (ARMS5), 24-26 November 2008 Tehran, Iran. Vol.2, pp. 1135-1141.

[9] Sutradhar, A. and Paulino, GH.; 2004; "Symmetric Galerkin boundary element computation of T-stress and stress intensity factors for mixed-mode cracks by the interaction integral method". Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 28, pp. 1335-1350.

[10] Reyes, O. and Einstein, H.H.; 1991; "Failure mechanism of fractured rock - A fracture coalescence model", Proceedings 7th International Congress of Rock Mechanics. Vol. 1, pp. 333-340.

[11] Xu, C. and Fowell, R.J.; 1994; "Stress intensity factors evaluation for cracked chevron notched Brazilian disk specimens", International Journal of Rock Mechanics. Min. Sci. and Geomechanics Abstract. 31(2), pp. 157-162.

[12] Fatehi, M. M., Hosseini-Nasab, H. and Morshedi, A.H.; 2009; "Numerical modeling of crack propagation in rocks under TBM disc cutters" International Journal of solids and structures, Vol. 4(3), pp. 605-627.

[13] Fatehi, M.M. Hosseini-Nasab, H. and Kohsary A.H.; 2006; "On the uses of special crack tip elements in numerical rock fracture mechanics", International Journal of Solids and Structures. Vol. 43, pp.1669-1692.

[14] Fatehi, M.M. and Morshedi, A.H.; 2007; "Numerical modeling of pressurized circular holes with cracks in semi-infinite rock masses" Third Iranian Rock Mechanics Conference.

[15] Belytschko, T. Krongauz, Y. Organ, D. Fleming, M. and Krysl, P.; 1996; "Meshless methods: an overview and recent developments", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 139, pp. 3-47.

[16] Ayatollahi, M.R., and Aliha, M.R.M.; "Fracture toughness study for a brittle rock subjected to mixed mode I/II loading", International Journal of

مثال‌ها بیانگر این است که معیار ضرایب تمرکز تنش، مرحله اول رشد را دقیق پیش‌بینی نموده ولی قادر نیست بقیه مراحل را بدرستی پیش‌بینی نماید حال آنکه نتایج معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش در هر دو مثال و در تمامی مراحل رشد ترک از دقت خوبی برخوردار است. مقایسه نتایج دو مثال همچنین نشان می‌دهد که بسته به هندسه نمونه ترک‌دار ممکن است رشد ترک پایدار یا ناپایدار باشد. مسیر نهایی رشد ترک در مثال اول با نتایج عددی و در مثال دوم با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است که تطابق بسیار خوبی را با این نتایج نشان می‌دهد. نتایج این مطالعه بیانگر این است که روش بدون مش گالرکین در مدلسازی شکستگی‌ها و تحلیل مسائل مکانیک شکست سنگ از پتانسیل بالایی برخوردار بوده و به همراه معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش قابلیت پیش‌بینی رشد ترک در محیط‌های سنگی را داراست.

منابع

[1] Chang, S.H. Lee C.I., Jeon S.; 2002; "Measurement of rock fracture toughness under modes I and II and mixed-mode conditions by using disc-type specimens", Engineering Geology, Vol. 66, pp. 79-97.

[2] Xiangqiao, Y.; 2006; "Stress intensives and propagation of mixed-mode cracks", Engineering Failure Analysis, Vol. 13, pp. 1022-1027.

[۳] جاویدراد، فرهاد؛ ۱۳۸۳؛ مکانیک شکست و کاربرد آن در مهندسی، چاپ اول، ۴۴۸ص، انتشارات صنایع هوا فضا، تهران.

[4] Bobet, A. and Einstein, H.H.; 1998; "Numerical modeling of fracture coalescence in a model rock material", Int. J. Fract., Vol. 92, pp. 221-252.

[5] Dobroskok, A. Ghassemi, A. and Linkov, A.; 2005; "Extended structural criterion for numerical simulation of crack propagation and coalescence under compressive loads", International Journal of Fracture, Vol.133, pp. 223-246.

[6] Mirzaei, H. Kakaie, R. and Hassani, B.; 2008; "Numerical Determination of Tension Mode Stress Intensity Factor in Jointed Rock Medium Using Stress Extrapolation Method", 8-th international scientific conference on modern management mine producing, geology and environmental protection, Bulgaria. Vol.1, pp. 497-504.

- mechanics problems*”, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 72, pp. 2808–2820.
- [21] Tsunori, M. Hagihara, S. Ebina, A. Kasa, S. Ikeda, T. and Miyazaki, N.; 2004; “*Calculation of mixed mode stress intensity factors for crack propagation using element free Galerkin method*”, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS, pp. 1-8.
- [22] Wilson, W.K.; 1969; “*Combined mode fracture mechanics*, PhD Thesis, University of Pittsburg”, PA.
- [23] Rao, B.N., Rahman, S.; 2001; “A coupled meshless-finite element method for fracture analysis of cracks”, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 78(9), pp. 647-657.
- Rock Mechanics & Mining Sciences, Article in press.
- [17] Erdogan, F. and Sih, G.C.; 1963; “*On the crack extension in plates under plane loading and Transverse shear*” Journal of Basic Engineering, Vol. 85, pp. 519-527.
- [18] Vasarhelyi, B. and Bobet, A.; 2000; “*Modeling of Crack Initiation, Propagation and Coalescence in Uniaxial Compression*”, Rock Mech. Rock Engng., Vol. 33 (2), pp. 119–139.
- [19] Belytschko, T. Lu, Y.Y. Gu, L.; 1994; “*Element-free Galerkin methods*”, Int. J. Numer. Methods Engng., Vol. 37, pp. 229–256.
- [20] Brighenti, R.; 2005; “*Application of the element-free Galerkin meshless method to 3-D fracture*

پی نوشت

-
- ¹ - Ervin
² - Wilson
³ Rao
⁴ Rahman