

مقاله پژوهشی

بررسی توانایی روش کاپیولای گامبل - کلیتون برای تخمین زمین آماری

بابک سهرابیان^{*۱}

۱. استادیار دانشکده محیط زیست، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران، Babak_sohrabian@uut.ac.ir

(دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۰۱ - پذیرش: ۱۳۹۹/۱۲/۰۸)

چکیده

در روش کریجینگ وزن‌دهی به هر نمونه با توجه به ساختار فضایی متغیر، بر اساس فاصله از نقطه تخمین و بدون توجه به مقدار نمونه‌ها انجام می‌گیرد. این مشکل کریجینگ لزوم استفاده از روش‌های جدید همچون کاپیولای فضایی که در آن هم مقدار متغیر ناحیه‌ای و هم فاصله از نقطه تخمین در تعیین وزن موثر است را نشان می‌دهد. در این مطالعه، ترکیبی از کاپیولاهای ارشمیدسی کلیتون و گامبل در توصیف ساختار فضایی دو مجموعه داده یکی حاوی ویژگی‌های فیزیکی و مکانیکی شبیه‌سازی شده از یک معدن سنگ آندزیت و دیگری حاصل از مغزه‌گیری از یک کانسار مس پورفیری، مورد استفاده قرار گرفته است. کاپیولای ترکیبی قادر به توصیف انواع ساختارهای فضایی با همبستگی نامتقارن دمی بالا و پایین در گام‌های مختلف بوده است. آزمون اعتبارسنجی متقابل به روش جک‌نایف نشان‌دهنده عملکرد بهتر کاپیولا نسبت به کریجینگ معمولی بوده است، به طوری که برای بیشتر متغیرها میانگین داده‌ها به خوبی با روش کاپیولا تخمین زده شده است. ضریب همبستگی نتایج تخمینی کاپیولا و مقادیر واقعی بزرگتر از مقادیر متناظر در تخمین کریجینگ بوده است. خطای میانگین مربعات در روش کاپیولا خیلی کمتر از روش کریجینگ بوده است و نمودار پراکندگی مقادیر تخمینی در مقابل مقادیر واقعی، نشانگر نزدیک‌تر بودن توزیع نتایج کاپیولا به توزیع داده‌ها است. عملکرد کریجینگ تحت تاثیر توزیع متغیرها بوده، به طوری که با افزایش مقدار مطلق چولگی، از کارایی این روش به شدت کاسته شده است. همچنین، در روش کریجینگ، صحت و دقت تخمین‌ها با افزایش اثر قطعه‌ای، کاهش یافته است. در مقابل، توزیع داده‌ها و مقدار اثر قطعه‌ای، تاثیر به مراتب کمتری در عملکرد کاپیولا داشته است. به علت انعطاف‌پذیری زیاد توابع کاپیولا در توصیف ساختار فضایی و نتایج بهتر این روش نسبت به کریجینگ معمولی، استفاده از کاپیولا در تخمین زمین آماری که باعث بهبود برآوردها و در نتیجه ارزیابی اقتصادی بهتر در معادن است، توصیه می‌شود.

کلمات کلیدی

کاپیولا، کریجینگ، ساختار فضایی، وابستگی دمی.

^{*} نویسنده مسئول مکاتبات.

۱- مقدمه

بعضی از ویژگی‌های کاپیولای گاوسی از جمله تقارن و وابستگی دمی صفر، محدودکننده بوده است، به طوری که منجر به توصیف غیرواقعی ساختار فضایی متغیرهایی می‌شود که وابستگی دمی بالا و پایین از خود نشان می‌دهد [۶]. با توجه به ضعف کاپیولای گاوسی در توصیف وابستگی دمی، کاپیولای تی-استیودنت توسط محققان پیشنهاد و به کارگرفته شده است.

وابستگی دمی در این کاپیولا به ترتیب رابطه مستقیم و معکوس با ضریب همبستگی و درجه آزادی دارد. کاپیولای تی-استیودنت همانند کاپیولای گاوسی متقارن بوده است که این مساله منجر به عدم کارایی آن در توصیف توزیع احتمال توام با دُم‌های نامتقارن می‌شود [۲۳].

برای حل این مشکل، استفاده از کاپیولاهای ارشمیدسی همچون گامبل، کلیتون و جو که دم‌های نامتقارن دارد، پیشنهاد شده است. گرچه هرکدام از این کاپیولاها می‌تواند در مدل‌سازی توزیع احتمال توام با وابستگی دمی خاص مورد استفاده قرار گیرد، هیچ‌کدام به تنهایی قادر به توصیف کامل ساختار فضایی متغیرها نیست. برای مثال، کاپیولاهای گامبل و کلیتون به ترتیب دارای وابستگی دمی مثبت و منفی است اما، در مهندسی معدن و دیگر علوم زمین، امکان مواجهه با متغیرهایی با وابستگی دمی منفی در فواصل کوتاه و وابستگی دمی مثبت در گام‌های بزرگ و برعکس، وجود دارد. برای حل این مساله، کاپیولای جو-کلیتون [۱۹] که هر دو وابستگی دمی بالا و پایین را نشان می‌دهد، معرفی شده است. کاپیولای جو-کلیتون به شدت تحت تاثیر مقادیر خارج از ردیف است، بنابراین، برای حل این مشکل، با در نظر گرفتن این حقیقت که ترکیب دو کاپیولای ارشمیدسی یک کاپیولای ارشمیدسی است [۱۸]، ترکیب محدب خطی کاپیولاهای فرانک، گامبل و کلیتون در مطالعاتی نظیر باسیگال و همکاران (۲۰۱۵) [۲۴]، هلبین و همکاران (۲۰۱۹) [۲۵] و سهرابیان (۲۰۲۰) [۲۶] به کار برده شده است. این نوع کاپیولای ترکیبی ضرورتاً متقارن نبوده و دارای دُم‌های مثبت و منفی است.

علاوه بر تعیین وزن نمونه‌ها با توجه به ساختار فضایی و مقادیر متغیر ناحیه‌ای، از دیگر مزایای روش‌های زمین‌آماری مبتنی بر کاپیولا نسبت به روش‌های معمول گاوسی مانند انواع کریجینگ خطی، توانایی محاسبه و نمایش بازه عدم اطمینان به صورت توزیع شرطی، با اشکال گوناگون است. در حالی که در روش کریجینگ، فرض بر توزیع نرمال و متقارن بازه اطمینان حول مقدار تخمینی بوده است که این مساله می‌تواند

یکی از مهم‌ترین و چالش برانگیزترین مسایل در مهندسی معدن و علوم زمین تخمین در نقاط نامعلوم با استفاده از تعداد محدودی نمونه است. بنابراین، روش‌های مختلفی از قبیل روش‌های کلاسیک (نزدیک‌ترین همسایگی، وزن‌دهی عکس فاصله، پلیگون‌بندی)، زمین‌آماری (کریجینگ معمولی، ساده، غیرخطی) و مبتنی بر هوش مصنوعی (ماشین بردار پشتیبان، شبکه عصبی مصنوعی، موجک) برای انجام تخمین ابداع شده است. در این میان، کریجینگ به عنوان بهترین تخمینگر خطی نارایب یکی از متداول‌ترین روش‌ها در مهندسی معدن بوده است. در روش کریجینگ، وزن‌دهی به هر نمونه با توجه به ساختار فضایی متغیر مورد بررسی، تعداد کل نمونه‌ها و موقعیت آن‌ها نسبت به یکدیگر و همچنین نسبت به نقطه تخمین انجام می‌شود. یکی از کاستی‌های این روش عدم تاثیر مقدار متغیر ناحیه‌ای در تعیین اوزان کریجینگ است. بنابراین، روشی که هم ساختار فضایی و هم مقادیر متغیر ناحیه‌ای را مد نظر قرار داده و عملیات تخمین را بهبود دهد، ترجیح داده خواهد شد. تخمین با استفاده از رویکرد کاپیولا که توزیع توام متغیرها را با توزیع‌های حاشیه‌ای آن‌ها مرتبط می‌سازد، ابزار مناسبی برای این مساله فراهم کرده است. به طوری که توابع کاپیولا به صورت گسترده در مطالعات گوناگون از قبیل اقتصاد و مهندسی عمران استفاده شده [۵-۱] و در سال‌های اخیر در علوم زمین همانند هیدرولوژی، ژئوفیزیک، علوم خاک، مهندسی معدن و زمین‌شناسی رواج یافته است [۱۳-۶]. در این مطالعات، تعداد زیادی از مدل‌های نظری کاپیولا از قبیل کاپیولاهای بیضوی شامل گاوسی و تی-استیودنت [۱۷-۱۴] و ارشمیدسی مانند کلیتون، فرانک، گامبل [۱۸] و جو [۱۹] مورد استفاده قرار گرفته است.

برای اولین بار در علوم زمین، باردوسی (۲۰۰۶) [۲۰] روش تخمین زمین‌آماری مبتنی بر کاپیولا را معرفی و از آن برای ارزیابی کیفیت آب زیرزمینی منطقه‌ای واقع در آلمان استفاده کرده است. در این مطالعه، عدم کارایی کاپیولای گاوسی در توصیف ساختار فضایی متغیرهای مورد بررسی نشان داده شده است. نتایج باردوسی (۲۰۰۶) [۲۰] و یافته‌های باردوسی و لی (۲۰۰۸) [۲۱] نشانگر عملکرد بهتر ولی ناکافی کاپیولای کای دو (توان دوم کای) در این زمینه بوده است.

با این وجود، به دلیل خواص شناخته شده و سهولت مدل‌سازی و تفسیر آن، کاپیولای گاوسی در مطالعات زیادی مانند آتالای و ترجان (۲۰۱۷) [۲۲] استفاده شده است اما،

$$C(u,1) = u, C(v,1) = v \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} C(u_i, u_j) \geq 0, \quad (3)$$

$$u_1 < u_2 \text{ and } v_1 < v_2$$

رابطه بین تابع کاپیولا و تابع توزیع توام با قضیه اسکالر [۳۰] بیان می‌شود. قضیه اسکالر نشان می‌دهد که برای توزیع‌های چندمتغیره پیوسته، حاشیه‌های تک‌متغیره می‌تواند از ساختار وابسته که با تابع کاپیولا تعریف می‌شود، جدا شود.

قضیه اسکالر: هرگاه $F_{12}(\cdot)$ تابع توزیع توام با توابع توزیع حاشیه‌ای $F_i(\cdot)$ برای $i=1,2$ باشد، آنگاه تابع کاپیولایی مانند C وجود دارد، به طوری که برای تمامی x_1 و x_2 در R رابطه ۴ برقرار است:

$$F_{12}(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (4)$$

برعکس، اگر C تابع کاپیولا و $F_i(\cdot)$ توابع توزیع حاشیه‌ای باشد، آنگاه $F_{12}(\cdot)$ توزیع توام با حاشیه‌های $F_i(\cdot)$ است. چگالی احتمال کاپیولا به شکل رابطه ۵ تعریف می‌شود:

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \quad (5)$$

بنابراین با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، چگالی توام از رابطه ۶ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f_{12}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{12}(x_1, x_2) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial F_1(x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2(x_2)}{\partial x_2} \quad (6) \\ &= c(u_1, u_2) \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \end{aligned}$$

با تعیین توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای و چگالی کاپیولا می‌توان چگالی توام متغیرهای تصادفی را به دست آورد. این بدان معنی است که تابع کاپیولا همه اطلاعات لازم در مورد ساختار وابستگی متغیرها را در بردارد. برخی از خواص تابع کاپیولا همانند پایایی در تبدیل متغیرها و توانایی محاسبه هماهنگی بین آن‌ها در مطالعه چگونگی وابستگی متغیرها مفید است. بنابراین بر اساس رابطه ۶ و با توجه به پایایی تابع کاپیولا، در صورت تبدیل توزیع داده‌ها به توزیع یکنواخت واحد، به ازای تمام مقادیر x_1 و x_2 چگالی توزیع‌های حاشیه‌ای مقدار ثابتی می‌شود و بنابراین چگالی توزیع توام برابر ضریب ثابتی از چگالی کاپیولا می‌شود.

منجر به تولید مقادیر نامعقول همانند غلظت‌های منفی شود [۲۷]. علاوه بر این، باردوسی (۲۰۰۸) [۷] و جورنل و آلبرت (۱۹۸۹) [۲۸] نشان داده‌اند که بازه اطمینان حاصل از کریجینگ، تابعی از توزیع فضایی نقاط نمونه‌برداری بوده و در حقیقت غیرمفید بوده است و کارایی چندانی ندارد. همچنین، کریجینگ و ابزار آن یعنی واریوگرام به مقادیر خارج از ردیف حساس بوده و به شدت تحت تاثیر توزیع حاشیه‌ای متغیر ناحیه‌ای است. در مقابل روش کاپیولا مشکلی با مقادیر خارج از ردیف نداشته و در مقیاس‌های مختلف و تبدیل توزیع داده‌ها ثابت است [۲۹]. بنابراین، در صورت رویارویی با داده‌های حاوی مقادیر خارج از ردیف، داده‌های به شدت چوله و یا داده‌های دارای چندین مد، نتایج تخمین کاپیولا می‌تواند نسبت به کریجینگ قابل اعتمادتر باشد. در این مقاله، به دلیل سادگی و انعطاف‌پذیری در توصیف انواع ساختارهای فضایی، ترکیب محدب خطی کاپیولاهای ارشمیدسی به عنوان روش جدیدی در تعیین ساختار فضایی متغیرها مورد استفاده قرار می‌گیرد. کارایی این روش با اجرای آزمون جک‌نایف بر روی دو مجموعه داده با روش کریجینگ معمولی، مقایسه می‌شود.

سازماندهی مقاله به صورت زیر است: در بخش دوم نظریه کاپیولا، نحوه توصیف ساختار فضایی به وسیله کاپیولاهای ارشمیدسی، همبستگی دمی، ضریب همبستگی رتبه‌ای کندال و ترکیب محدب خطی کاپیولاهای ارشمیدسی ارائه می‌شود. بخش سوم دربرگیرنده مطالعه موردی شامل توصیف داده‌ها، چگونگی انجام تست جک‌نایف، نحوه ترکیب کاپیولاهای ارشمیدسی و استفاده از آن‌ها در عملیات تخمین و مقایسه نتایج اعتبارسنجی متقابل تخمین کاپیولا با روش کریجینگ معمولی است و در آخر بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲- روش تحقیق

۲-۱- کاپیولا

کاپیولا تابعی است که توزیع توام، متغیرهای تصادفی را به دو بخش توزیع‌های حاشیه‌ای و ساختار وابسته تقسیم می‌کند. به طوری که توزیع وابسته پیوند بین توزیع‌های حاشیه‌ای و توزیع توام را میسر می‌سازد.

تابع $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ کاپیولا نامیده می‌شود، چنانچه برای تمامی u و v ‌های تعریف شده در بازه $[0,1]$ شرایط رابطه‌های ۱ تا ۳ برآورده شود:

$$C(u, v) = 0, u = 0 \quad \text{or} \quad v = 0 \quad (1)$$

۲-۲- وابستگی دومی

متغیر X_1 و X_2 در یکی از زوج‌ها بیشتر از زوج دیگر است. در مقابل در یک جفت ناسازگار بیشتر بودن مقدار یکی از متغیرها در زوج اول به معنای بیشتر بودن مقدار متغیر دیگر در زوج دوم است. ضریب رتبه‌ای کندال می‌تواند بر اساس تابع کاپیولا C و مستقل از توزیع‌های حاشیه‌ای X_1 و X_2 به صورت رابطه ۱۲ محاسبه شود [۳۱، ۱۸]:

$$\tau_{X_1, X_2} = 4 \iint_{I^2} C(u_1 u_2) dC(u_1 u_2) - 1 \quad (12)$$

همبستگی رتبه‌ای کندال در تبدیل هیستوگرام توزیع‌های حاشیه‌ای ثابت است و امکان توصیف وابستگی‌های غیرخطی که با استفاده از روش‌های خطی قابل محاسبه نیست را می‌دهد.

۲-۴- کاپیولاهای ارشمیدسی

کاپیولاهای گامبل و کلیتون متعلق به خانواده کاپیولاهای ارشمیدسی است. خانواده کاپیولاهای ارشمیدسی را می‌توان از مفهوم تابع مولد $\Phi: I \in R^2$ که تابعی پیوسته و نزولی با $\Phi(1) = 0$ است، ایجاد کرد. با اسفاده از تابع مولد Φ ، کاپیولای ارشمیدسی C^A به صورت رابطه ۱۳ نوشته می‌شود [۳۲، ۱۹]:

$$C^A(u_1, u_2) = \Phi^{-1}(\Phi(u_1) + \Phi(u_2)) \quad (13)$$

توابع کاپیولای ارشمیدسی دارای خواص مهمی از قبیل تقارن و پیوستگی است.

۲-۴-۱- تابع کاپیولای کلیتون

تابع کاپیولای کلیتون با رابطه ۱۴ تعریف می‌شود:

$$C^C(u_1, u_2) = [u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1]^{-1/\theta} \quad (14)$$

این تابع کاپیولا دارای مولد $\Phi(t) = (t^{-\theta} - 1)$ با $\Phi^{-1}(t) = (1+t)^{-1/\theta}$ است. برای $\theta > 0$ ، این تابع اکیدا یکنوا است. وقتی $\theta \rightarrow 0$ ، آنگاه $C^C(u_1, u_2) = u_1 u_2$ و هرگاه $\theta \rightarrow \infty$ ، کران بالای فرشت - هوفدینگ به دست می‌آید. بنابراین وابستگی دومی بالا مساوی با صفر و وابستگی دومی پایین برابر با $\lambda_L = 2^{-(1/\theta)}$ خواهد بود. در این کاپیولا رابطه میان ضریب تای کندال و θ به صورت رابطه ۱۵ تعریف می‌شود:

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2} \quad (15)$$

۲-۴-۲- تابع کاپیولای گامبل

تابع کاپیولای گامبل که متعلق به خانواده مقادیر اکسترم

وابستگی دومی نشان‌دهنده میزان وابستگی حرکت مشترک متغیرهای تصادفی در نقاط دم توزیع آن‌ها است و از خواص مهم بعضی از توابع کاپیولا مانند کاپیولاهای ارشمیدسی نوع گامبل و کلیتون است.

در حالت دو متغیره، هرگاه $i = 1, 2$ و $F_i(\cdot)$ توابع توزیع حاشیه‌ای و u حد آستانه باشد، آنگاه ضریب دم بالایی، λ_U ، به صورت حد زیر (رابطه ۷) تعریف می‌شود:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(F_1(x_1) > u | F_2(x_2) > u) \quad (7)$$

در صورتی که $\lambda_U \in [0, 1]$ باشد، می‌توان گفت که X_1 و X_2 مجانباً به دم بالایی وابسته و اگر $\lambda_U = 0$ آنگاه X_1 و X_2 مجانباً مستقل است. رابطه ۷ بر اساس تابع کاپیولا به صورت رابطه ۸ بیان می‌شود:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad (8)$$

مفهوم وابستگی دومی پایین λ_L را می‌توان به شکل مشابه به صورت رابطه ۹ تعریف کرد:

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(F_1(x_1) < u | F_2(x_2) < u) \quad (9)$$

که بر حسب تابع کاپیولا، به شکل رابطه ۱۰ بیان می‌شود:

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \quad (10)$$

۲-۳- ضریب همبستگی رتبه‌ای کندال

ضریب همبستگی رتبه‌ای کندال معیاری از هماهنگی بین متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 است که به صورت رابطه ۱۱ محاسبه می‌شود:

$$\tau = P[(X_1 - X_1^2)(X_2 - X_2^2) > 0] - P[(X_1 - X_1^2)(X_2 - X_2^2) < 0] \quad (11)$$

زوج مستقل دوم با توزیع یکسان (X_1^2, X_2^2) است. ضریب همبستگی رتبه‌ای آماره‌ای ناپارامتری در بازه ± 1 است که با استفاده از زوج‌های مشاهده شده از دو متغیر تصادفی دارای توزیع توام محاسبه می‌شود. اگر همه جفت مشاهدات از نوع جفت سازگار باشد، ضریب همبستگی کندال برابر با ۱+ و اگر کلیه مشاهدات از نوع جفت ناسازگار باشد، تای کندال برابر ۱- می‌شود. یک جفت سازگار به دو زوج از مشاهدات گفته می‌شود که در آن‌ها مقدار هر دو

است به صورت رابطه ۱۶ بیان می‌شود:

$$C^G(u_1, u_2) = \exp(-[(-\ln u_1)^\xi + (-\ln u_2)^\xi]^{1/\xi}) \quad (16)$$

مولد و معکوس آن به ترتیب برابر با $\Phi(t) = (-\ln t)^\xi$ و $\Phi^{-1}(t) = \exp(-t^{1/\xi})$ است و پارامتر ξ شدت وابستگی را نشان می‌دهد؛ $\xi = 1$ این واقعیت را می‌رساند که $C^G(u_1, u_2) = u_1 u_2$ است، به بیان دیگر هیچ وابستگی وجود ندارد؛ وقتی که $\xi = \infty$ باشد، وابستگی کامل است. وابستگی دمی پایین برابر $\lambda_L = 0$ و وابستگی دمی بالا به شکل $\lambda_U = 2 - 2^{-(1/\xi)}$ است و ضریب تالی کندال مربوطه به صورت $\tau = 1 - 1/\xi$ بیان می‌شود.

۳-۴-۲- ترکیب کاپیولاهای ارشمیدسی

در این قسمت نحوه ترکیب کاپیولاهای ارشمیدسی کلیتون و گامبل برای استفاده از خواص دم بالایی (مثبت) و پایینی (منفی) توضیح داده شده و چگونگی توصیف ساختار فضایی متغیر تصادفی با آن‌ها بیان خواهد شد. واضح است که هر یک از توابع کاپیولای ارشمیدسی C^G و C^C ، به تنهایی قابلیت توصیف تمام رفتارهای دمی موجود در نمودارهای نقطه‌ای متغیر مورد بررسی در فواصل مختلف را ندارد. با استفاده از هر یک از کاپیولاهای C^G و C^C به ترتیب قابلیت مدل‌سازی وابستگی دمی منفی و مثبت به دست می‌آید. برای حل این مساله و برای مدل‌سازی توام وابستگی دمی مثبت و منفی، با توجه به اینکه ترکیبی از دو تابع کاپیولای ارشمیدسی خود یک تابع کاپیولای ارشمیدسی است [۱۸]، از ترکیب خطی محدب این دو تابع کاپیولا می‌توان بهره برد. به عبارت دیگر، امکان ترکیب دو تابع کاپیولای ارشمیدسی کلیتون و گامبل به صورت رابطه ۱۷ وجود دارد:

$$C^{CG}(u_1, u_2) = \pi C^C(u_1, u_2) + (1 - \pi) C^G(u_1, u_2) \quad (17)$$

که در آن $\pi \in [0, 1]$ و C^{CG} تابع کاپیولای ترکیبی کلیتون- گامبل است. خواص کاپیولای ترکیبی کلیتون- گامبل را می‌توان از ویژگی‌های توابع کاپیولای C^C و C^G نتیجه گرفت. وابستگی‌های دمی بالایی و پایینی این تابع به ترتیب λ_U^{CG} و λ_L^{CG} است (روابط ۱۸ و ۱۹):

$$\lambda_U^{CG} = (1 - \pi) \lambda_U^C \quad (18)$$

$$\lambda_L^{CG} = \pi \lambda_L^C \quad (19)$$

به همین ترتیب، ضریب تالی کندال تابع کاپیولای ترکیبی را می‌توان به صورت رابطه ۲۰ بیان کرد:

$$\begin{aligned} \tau^{CG} &= \pi^2 \tau^C + (1 - \pi)^2 \tau^G \\ &+ 2\pi(1 - \pi) [4 \int_{I^2} C^C(u_1, u_2) dC^G(u_1, u_2) - 1] \\ &= \pi^2 \tau^C + (1 - \pi)^2 \tau^G + 2\pi(1 - \pi) \\ &[1 - 4 \int_{I^2} \frac{\partial C^C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \frac{\partial C^G(u_1, u_2)}{\partial u_2}] \end{aligned} \quad (20)$$

رابطه ۲۰ را می‌توان به صورت تابعی از پارامترهای θ و ξ برای حالتی که $\pi \neq 0, 1$ است، نوشت (رابطه ۲۱):

$$\begin{aligned} \tau^{CG} &= \frac{\pi \theta}{\theta + 2} + (1 - \pi) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \\ &[4 \int_{I^2} C^C(u_1, u_2) dC^G(u_1, u_2) - 1] \end{aligned} \quad (21)$$

θ و ξ به ترتیب در رابطه با کاپیولاهای کلیتون و گامبل است و با استفاده از روابط ۲۲ و ۲۳ محاسبه می‌شود:

$$\theta = \frac{\log 2}{\log(\lambda_L^{CG} / \pi)} \quad (22)$$

$$\xi = \frac{\log 2}{\log(2 - \frac{\lambda_U^{CG}}{\pi} - 1)} \quad (23)$$

وابستگی‌های دمی منفی و مثبت به ترتیب از روابط ۲۴ و ۲۵ به دست می‌آید:

$$\lambda_L^{CG} = \pi 2^{-1/\theta} \quad (24)$$

$$\lambda_U^{CG} = (1 - \pi)(2 - 2^{1/\xi}) \quad (25)$$

۵-۲- تخمین زمین‌آماري بر اساس کاپیولا

اگر تابع تصادفی $Z(x)$ دارای ساختار فضایی و نمونه‌برداری شده در نقاط x در نظر گرفته شود برای مدل‌سازی ساختار فضایی این متغیر تصادفی در سایر نقاط (مابین نمونه‌های برداشت شده) می‌توان توزیع توام دومتغیره را با روشی مشابه با روش محاسبه واریوگرام و یا اتوکوواریانس به دست آورد و سپس از تابع کاپیولا برای توصیف آن استفاده کرد. برای این منظور، همانند محاسبه واریوگرام فرض می‌شود که مقادیر دومتغیره مرتبط با دو وضعیتی که به فاصله h از هم قرار گرفته‌اند، مستقل از مکان و تنها وابسته به h است. در این حالت، تابع کاپیولای فضایی C_S به تابعی از بردار h تبدیل می‌شود (رابطه ۲۶):

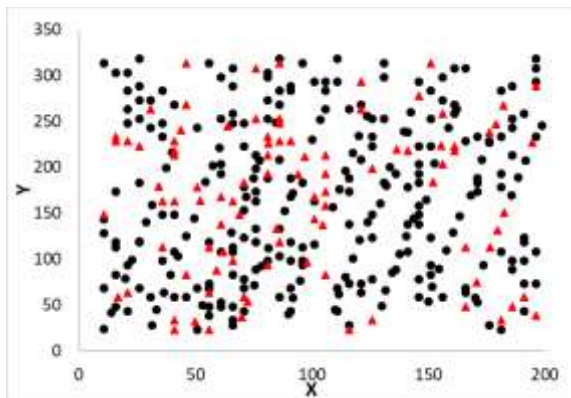
- تعیین پارامترهای فضای جستجو.
- تخمین تابع چگالی شرطی بر اساس نمونه‌های مجاور.
- محاسبه تابع توزیع شرطی کاپیولا با انتگرال گیری عددی بر روی چگالی شرطی.
- محاسبه میانه تابع توزیع شرطی کاپیولا و تعیین آن به عنوان مقدار تخمینی.

۳- مقایسه کاپیولا و کریجینگ

در این مطالعه، برای ارزیابی کارایی تخمین با استفاده از کاپیولاهای ارشمیدسی دو مجموعه داده دوبعدی شامل تعدادی از خواص فیزیکی و مکانیکی آندزیت و سه‌بعدی حاصل از عملیات مغزه‌گیری مورد استفاده قرار گرفته است. کلیه محاسبات مربوط به روش کاپیولا در محیط متلب با استفاده از کد نوشته شده توسط نویسندگان اجرا شده است. واریوگرافی و تخمین به روش کریجینگ در نرم‌افزار SGeMS انجام شده است.

۳-۱- مجموعه داده شماره ۱

این مجموعه داده از شبیه‌سازی خواص فیزیکی و مکانیکی سنگ آندزیت شامل مقاومت فشاری تک‌محوره، مدول الاستیک و تخلخل در یک محدوده 195×295 مترمربعی در اطراف آنکارا به‌دست آمده است. به علت کم بودن تعداد نمونه‌ها برای ترسیم نمودارهای نقطه‌ای و واریوگرام‌های قابل اطمینان، با استفاده از ۱۰۸ داده موجود، عملیات شبیه‌سازی با روش متوالی مستقیم در ۳۸۵ نقطه انجام گرفته و نتایج برای انجام تست جک‌نایف به روش برگزاری به دو مجموعه آموزش شامل ۲۸۸ نقطه و مجموعه اعتبارسنجی متقابل متشکل از ۹۷ نقطه تقسیم شده است (شکل ۱). آمار توصیفی هر دو مجموعه از قبیل مقدار میانگین، واریانس، کشیدگی، چولگی و مقادیر حداقل و حداکثر متغیرها در جدول ۱ آورده شده است.



شکل ۱- موقعیت نقاط مجموعه داده (دایره‌های سیاه رنگ) و مجموعه اعتبارسنجی متقابل (مثلث‌های قرمز رنگ).

$$C_S(\mathbf{h}, u_1, u_2) = P[F_Z(Z(x)) < u_1, F_Z(Z(x+\mathbf{h})) < u_2] \quad (26)$$

$$= C(F_Z(Z(x)), F_Z(Z(x+\mathbf{h})))$$

F_Z توزیع حاشیه‌ای تابع Z بوده که در تمام نقاط x یکسان فرض شده است. هر دو نقطه جدا شده به وسیله \mathbf{h} با توابع توزیع دومتغیره‌ای که ارتباط آن‌ها با تابع کاپیولای دوبعدی توصیف شده است، با یکدیگر مرتبط است. همانند واریوگرام، فرض می‌شود که تابع کاپیولا به موقعیت x بستگی نداشته و تنها به بردار جداکننده \mathbf{h} وابسته است. برای به‌دست آوردن تابع کاپیولای دومتغیره که وابستگی فضایی متغیر مورد مطالعه را توصیف می‌کند، می‌توان از نمودارهای نقطه‌ای که در فواصل مختلف \mathbf{h} از مقادیر نمونه‌برداری شده $z(x_1), \dots, z(x_n)$ محاسبه می‌شود، استفاده کرد [۳۳]. بدین ترتیب که مجموعه $S(\mathbf{h})$ با بهره‌گیری از جفت نمونه‌های واقع به فاصله \mathbf{h} از هم مشخص می‌شود (رابطه ۲۷):

$$S(\mathbf{h}) = \{(z(x_i), z(x_j)) \mid (x_i - x_j) \approx \mathbf{h} \text{ or } (x_j - x_i) \approx \mathbf{h}\} \quad (27)$$

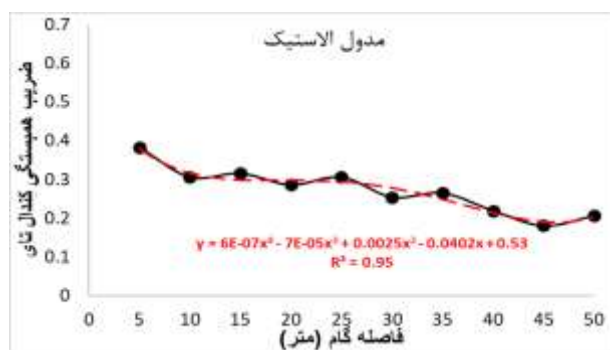
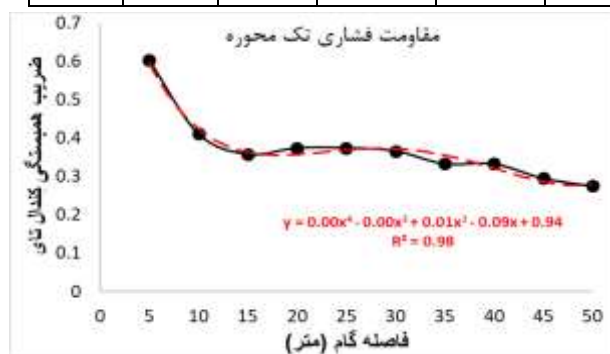
نمودارهای نقطه‌ای محاسبه شده در فواصل \mathbf{h} می‌تواند دارای توزیع‌ها و ویژگی‌های متفاوتی باشد. بعضی از آن‌ها ممکن است نسبت به محور فرعی نمودار نقطه‌ای متقارن بوده و وابستگی دومی از خود نشان ندهد، اینچنین توزیع‌ها را می‌توان با استفاده از کاپیولاهایی مانند کاپیولای نرمال برازش کرد. بعضی دیگر ممکن است وابستگی‌های دومی از نوع متقارن و یا نامتقارن از خود بروز دهد که در این حالت، استفاده از انواع کاپیولاهای ارشمیدسی با توجه به نوع و چگونگی وابستگی دومی توصیه می‌شود [۲۵].

با استفاده از آزمون کولموگروف-اسمیرنف کاپیولایی با تابع چگالی احتمال مناسب به نمودار نقطه‌ای حاصل از رابطه ۲۷ برازش داده می‌شود. سپس با توجه به پارامترهای فضای جستجو مانند حداقل و حداکثر تعداد نقاط مورد استفاده در تخمین و فاصله نمونه‌های واقع در همسایگی نقاط نمونه‌برداری نشده، چگالی شرطی هر یک از نقاط تخمینی به‌دست آمده و با انتگرال‌گیری عددی توزیع تجمعی محاسبه می‌شود. در پایان با فرض اینکه توزیع حاشیه‌ای هر یک از این نقاط یکنواخت است، میانه توزیع تجمعی به عنوان مقدار تخمینی لحاظ شده و این مقدار به توزیع اصلی داده‌ها بازگردانده می‌شود. مراحل کلی تخمین فضایی با استفاده از کاپیولاها را می‌توان در گام‌های زیر خلاصه کرد:

- تبدیل توزیع متغیر مورد نظر به توزیع یکنواخت واحد.
- محاسبه نمودارهای نقطه‌ای در فواصل مختلف و برازش کاپیولای مناسب.

جدول ۱- آمار توصیفی متغیرها.

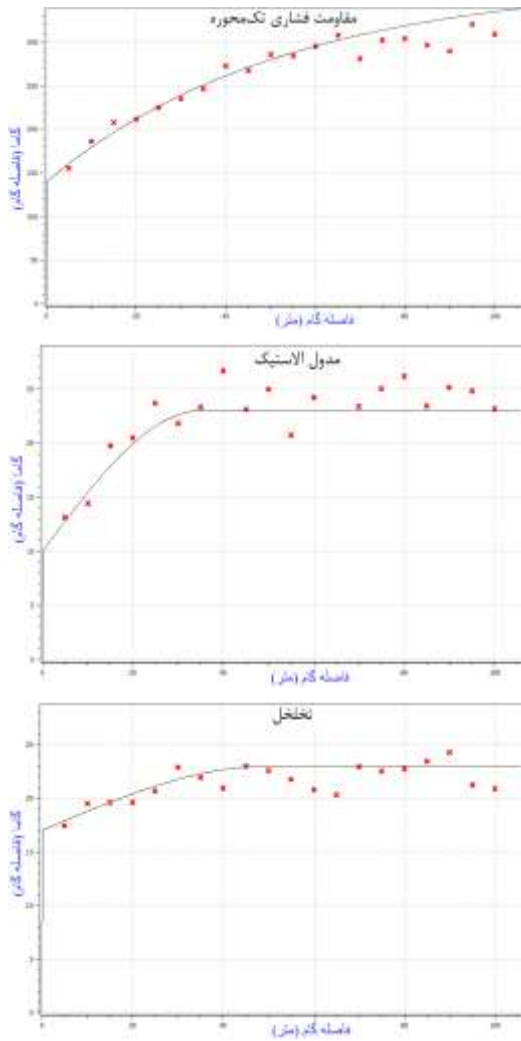
متغیر (واحد)	میانگین	واریانس	کشیدگی	چولگی	حداقل	حداکثر
مجموعه آموزش	مقاومت فشاری تک محوره (مگاپاسکال)	۶۳,۸۳	۳۹۶,۹۵	-۰,۷۳	۰,۱۵	۱۰,۵
	مدول الاستیک (مگاپاسکال)	۱۶,۰۵	۴۴,۱۷	۰,۱۶	۰,۳۲	۳۶,۵۶
	تخلخل (درصد)	۱۲,۲۷	۲۱,۹۸	۰,۱۷	-۰,۱۰	۲۴,۳۰
مجموعه کنترل	مقاومت فشاری تک محوره (مگاپاسکال)	۶۳,۳۵	۳۷۵,۰۷	-۰,۷۴	۰,۰۰	۱۰,۵
	مدول الاستیک (مگاپاسکال)	۱۵,۵۷	۴۷,۲۰	-۰,۲۵	۰,۱۲	۳۲,۳۹
	تخلخل (درصد)	۱۲,۲۵	۲۵,۳۱	-۰,۱۷	-۰,۰۲	۲۳,۵۶
مجموعه آموزش	مس (درصد)	۰,۷۳	۰,۱۶	۱,۵۳	۰,۷۰	۲,۶۸
	مولیبدن (ppm)	۲۰۰,۴۹	۴۳۴۹۰	۴,۰۴	۱,۷۴	۱۲۵۴
	آهن (درصد)	۳,۱۹	۱,۵۶	۲,۸۳	۱,۳۷	۹,۲۰
مجموعه کنترل	گوگرد (درصد)	۳,۱۱	۲,۳۰	۲,۳۱	۱,۱۷	۱۰,۳۶
	مس (درصد)	۰,۷۰	۰,۱۴	۰,۵۶	۰,۳۲	۲,۶۸
	مولیبدن (ppm)	۲۲۲,۱۵	۴۷۷۵۹	۳,۱۲	۱,۶۱	۱۲۱۸
مجموعه آموزش	آهن (درصد)	۲,۸۳	۱,۰۴	۶,۹۱	۱,۶۵	۹,۱۵
	گوگرد (درصد)	۲,۵۶	۱,۴۹	۵,۵۱	۱,۳۴	۱۰,۳۸



شکل ۲- نمودار ضریب همبستگی رتبه‌ای کندال (نقاط سیاه رنگ) به همراه مدل برازش شده (خط بریده قرمز رنگ).

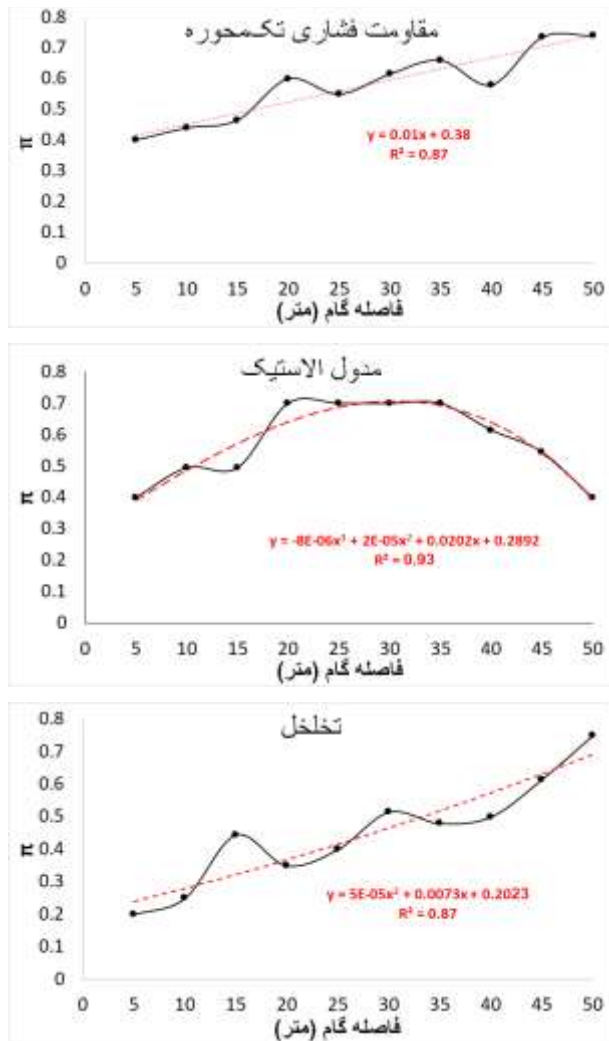
۱-۳- توصیف ساختار فضایی

از آنجا که فاصله متوسط داده‌های مجاور تقریباً ۵ متر است، با استفاده از رابطه ۲۷ نمودارهای نقطه‌ای متغیرها در فواصل گام ۵ متر و با در نظر گرفتن بازه اطمینان ۵ متر محاسبه و تای کندال‌های مربوطه در نمودارهای شکل ۲ ترسیم شده است. ضرایب تای کندال در تعیین وابستگی‌های دمی بالایی و پایینی و در نهایت در تعریف مناسب‌ترین کاپیولای کلیتون و گامبل در هر فاصله مورد استفاده قرار گرفته است. برای هر یک از متغیرها، با ترکیب کاپیولاهای کلیتون و گامبل بر اساس رابطه ۱۷، کاپیولای ارشمیدسی جدیدی که قادر به توصیف توام وابستگی دمی بالایی و پایینی نمودارهای نقطه‌ای است، محاسبه شده است. برای این منظور، بهترین ضریب π در هر فاصله گام با مقایسه تابع چگالی احتمال کاپیولای ترکیبی با چگالی احتمال تجربی متغیرها از طریق آزمون کولموگروف-اسمیرنوف، انتخاب شده است (شکل ۳). برای محاسبه ضرایب π و تای کندال متغیرها در همه فواصل، نمودارهای تجربی شکل‌های ۲ و ۳، با استفاده از مدل‌های چند جمله‌ای مناسب برازش شده است. حین انجام عملیات تخمین، مقادیر π کوچکتر از صفر و بزرگتر از ۱ به ترتیب با مقادیر صفر و ۱ جایگزین شده است. شکل ۳ نشانگر این است که ساختار فضایی مقاومت فشاری تک‌محوره، مدول الاستیک و تخلخل در فواصل گام کوچک دارای همبستگی دمی مثبت بیشتری نسبت به همبستگی دمی منفی است. به طوری که در فاصله گام ۵



شکل ۴- واریوگرام‌های غیرجهتی تجربی (نقاط قرمز رنگ) مجموعه داده شماره ۱ به همراه مدل‌های برازش شده (خطوط سیاه رنگ).

مورد ارزیابی قرار گرفته و به دلیل نبود ناهمسانگردی قابل توجه در ساختار فضایی متغیرها، واریوگرام‌های تجربی غیرجهتی نشان داده شده در شکل ۴ با مدل‌های مناسب برازش شده است. تخمین کریجینگ با استفاده از پارامترهای مدل‌های ارایه شده در جدول ۲ نشان داده شده است. مدول الاستیک و تخلخل با بهره‌گیری از اثر قطعه‌ای به اضافه یک مدل کروی و مقاومت فشاری تک‌محوره با استفاده از ساختاری متشکل از اثر قطعه‌ای و مدل نمایی برازش شده است. مدل‌های برازش شده به مقاومت فشاری تک‌محوره و تخلخل به ترتیب دارای بیشترین و کمترین نسبت واریانس تصادفی (اثر قطعه‌ای) به واریانس ساختاردار است. دامنه تاثیر واریوگرام‌های مقاومت فشاری تک‌محوره، مدول الاستیک و تخلخل به ترتیب برابر ۱۶۰، ۳۵ و ۵۰ متر است. حداقل و حداکثر تعداد نمونه مورد استفاده در تخمین کریجینگ ۳ و ۱۷ در نظر گرفته شده است.



شکل ۳- نمودار ضرایب π (نقاط سیاه رنگ) به همراه مدل برازش شده (خط بریده قرمز رنگ).

تابع کاپیولای کلیتون چیزی در حدود ۰/۲ تا ۰/۴ از کاپیولاهای ترکیبی را تشکیل می‌دهد. برای مقاومت فشاری تک‌محوره و تخلخل، نمودار ضرایب π روند صعودی داشته و در فاصله گام ۵۰ متر به عدد ۰/۷۵ می‌رسد. برای مدول الاستیک، نمودار ضرایب π ابتدا روند صعودی از خود نشان داده، در فاصله ۲۰ متری به حداکثر مقدار خود رسیده، در بازه ۳۵ تا ۵۰ متری ثابت بوده است و سپس با شیب زیاد کاهش یافته به مقدار کمتر از ۰/۴ می‌رسد.

برای انجام تخمین کریجینگ، محاسبه واریوگرام‌ها و برازش مدل‌های مناسب ارایه شده در شکل ۴ با استفاده از مجموعه متشکل از ۲۸۸ نقطه انجام گرفته است. واریوگرام‌ها در فواصل گام ۵ متر و با در نظر گرفتن تلورانس $\pm 2/5$ متر محاسبه شده است. برای بررسی ناهمسانگردی هندسی، ابتدا واریوگرام‌های جهتی در آزمون‌های ۰°، ۴۵°، ۹۰°، ۱۳۵° با میزان تلورانس $\pm 22/5$ درجه

۲-۱-۳- اعتبارسنجی متقابل

مقایسه روش کریجینگ و رویکرد کاپیولا از طریق اعتبارسنجی متقابل به واسطه آزمون جک‌نایف و با استفاده از مجموعه داده شماره ۱، نشانگر برتری روش کاپیولا بر روش کریجینگ است. هر روشی که مقدار متوسط داده‌ها را بهتر تخمین زده، خطای میانگین مربعات آن کمینه بوده، بیشترین ضریب همبستگی خطی مقادیر تخمینی و مشاهده‌ای را داشته و نتایج آن توزیع احتمال نزدیکتری به توزیع داده‌ها داشته باشد، نسبت به روش دیگر عملکرد بهتری دارد. با توجه به جدول ۴، میانگین مقاومت فشاری تک‌محوره مجموعه اعتبارسنجی ۶۳/۳۵ مگاپاسکال بوده است که با روش کاپیولا به خوبی و با میزان خطای اندک ۶۳/۳۴ مگاپاسکال تخمین زده شده است. نتایج کریجینگ با مقدار متوسط ۶۵/۴۵ مگاپاسکال دارای درصد خطای به مراتب بیشتری است. با اینکه مقدار میانگین نتایج تخمینی هر دو روش برای متغیرهای مدول الاستیک و تخلخل به مقادیر مشاهده شده نزدیک است، روش کاپیولا با سوگیری کمتر کارایی به مراتب بهتری در این زمینه دارد. نسبت خطای میانگین مربعات کریجینگ به کاپیولا به ترتیب همبستگی بسیار زیاد و متوسط با ضرایب چولگی و کشیدگی از خود نشان می‌دهد. به دلیل کوچکتر بودن مقدار خطای میانگین مربعات در روش کاپیولا، این روش دقت بیشتری نسبت به کریجینگ دارد. ضریب همبستگی خطی مقادیر تخمینی و مشاهده‌ای نشانگر برتری معنادار کاپیولا بر روش کریجینگ است. ضریب همبستگی نتایج تخمین کاپیولا و مقادیر مشاهده شده برای مقاومت فشاری تک‌محوره، مدول الاستیک و تخلخل به ترتیب برابر ۰/۱۵، ۰/۲۶ و ۰/۱۵ است. در مقابل، این معیار برای نتایج تخمین کریجینگ، به ترتیب ۰/۰۹، ۰/۱۵ و ۰/۰۱ است. این معیارها بیانگر برتری قاطع روش کاپیولا در مقابل کریجینگ است.

پراکندگی مقادیر تخمینی در مقابل مقادیر واقعی در شکل ۵ ترسیم شده است. در صورت یکسان بودن توزیع مقادیر تخمینی و داده‌های واقعی، این نمودار بر روی نیمساز ربع اول قرار خواهد گرفت. فاصله بیشتر این نمودار از نیمساز ربع اول نشانگر تفاوت بیشتر در توزیع احتمال دو جامعه است. همانگونه که در شکل ۵ دیده می‌شود، برای کلیه متغیرهای مجموعه داده شماره ۱، توزیع احتمال نتایج تخمینی کاپیولا نسبت به نتایج کریجینگ به نمودار مطلوب نزدیکتر است.

۲-۲- مجموعه داده شماره ۲

داده‌های مورد استفاده در این بخش از مغزه‌گیری ۶۰

گمانه اکتشافی در یکی از کنسارهای مس پورفیری ایران حاصل شده است. عیار مس، مولیبدن، آهن و گوگرد برای انجام مطالعات بیشتر انتخاب شده است. پس از اصلاح مقادیر خارج از ردیف به روش دورفل و با توجه به اندازه متوسط دو متری مغزه‌ها، عملیات کامپوزیت‌سازی با در نظر گرفتن کامپوزیت‌های ۲ متری انجام شده و بدین ترتیب تعداد ۴۴۴۰ کامپوزیت به‌دست آمده است. برای تشکیل مجموعه داده و مجموعه اعتبارسنجی متقابل مورد استفاده در آزمون جک‌نایف به روش برگزاری، گمانه‌ها به صورت تصادفی به دو گروه ۱۲ و ۴۸ تایی که به ترتیب دربرگیرنده ۸۳۰ و ۳۶۱۰ نمونه است، تقسیم شده است. موقعیت فضایی گمانه‌ها در شکل ۶ و آمار توصیفی هر یک از این مجموعه‌ها به صورت مجزا در جدول ۱ ارائه شده است.

۲-۳- توصیف ساختار فضایی

توصیف ساختار فضایی داده‌ها به روش کاپیولا با محاسبه نمودارهای نقطه‌ای در فواصل گام ۵ متر با تلورانس $\pm 2/5$ انجام شده است. ضریب همبستگی رتبه‌ای تای‌کندال و ضرایب π با استفاده از مجموعه داده ۳۶۱۰ نمونه‌ای در ۲۰ فاصله گام محاسبه و نمودارهای حاصل به وسیله توابع چندجمله‌ای مناسب مدل‌سازی شده است (شکل‌های ۷ و ۸). اگر مقدار ضریب همبستگی رتبه‌ای تای‌کندال تخمینی بزرگتر از ۱ باشد، آن ضریب در کد نوشته شده با مقدار ۱ جایگزین می‌شود. از نمودارهای شکل ۸ مشخص است که در فواصل کوتاه، سهم کاپیولای کلیتون در کاپیولای ترکیبی عناصر مس، آهن و گوگرد کمتر از ۰/۲ است. برای عناصر آهن و مس، نمودار π روند تقریباً صعودی دارد. حداکثر مقدار π برای مس برابر با ۰/۳۶ بوده که در فاصله گام ۴۰ متری اتفاق افتاده است. ساختار فضایی آهن و گوگرد در فواصل کم و ساختار فضایی مس در همه گام‌ها همبستگی دمی مثبت بیشتری از خود نشان می‌دهد. برای عنصر مولیبدن، مقدار π در فاصله گام صفر، برابر با ۰/۴۰ تخمین زده شده است. در دیگر فواصل گام کمتر از ۸۰ متر، سهم کاپیولای کلیتون بیشتر از کاپیولای گامبل است.

عملیات واریوگرافی نشانگر نبود ناهمسانگردی منطقه‌ای در متغیرها است. گوگرد و آهن ناهمسانگردی هندسی قابل توجهی از خود بروز ندادند، بنابراین واریوگرام غیرجهتی تجربی آن‌ها (شکل ۹) با استفاده از مدل‌های مناسب برازش شده و پارامترهای مربوط (جدول ۳) در تخمین کریجینگ به کار گرفته شده است. مدل‌های برازش شده به

نزدیکتر بودن توزیع احتمال نتایج کاپیولا به توزیع احتمال داده‌های واقعی است. در مقابل، کریجینگ معمولی عملکرد به ظاهر بهتری در برآورد توزیع احتمال مولیبدن به ویژه در مقادیر زیاد داشته است که این مساله ناشی از تمایل کریجینگ به بیش تخمینی تحت تاثیر چولگی بسیار زیاد است.

۴- بحث و نتیجه‌گیری

در مطالعات زمین‌آماری، هدف تخمین نقاط نامعلوم با استفاده از تعداد محدودی نمونه است که این مهم به صورت کلاسیک با روش کریجینگ انجام شده است. اما وزن‌های کریجینگ تنها با استفاده از ساختار فضایی متغیرها محاسبه شده است، بنابراین مقدار نمونه‌ها در محاسبه وزن هر نمونه مورد توجه قرار نمی‌گیرد. در این مقاله، برای مشارکت هم زمان ساختار فضایی و مقادیر نمونه‌ها در تعیین وزن هر نمونه، ترکیب محدب خطی کاپیولای‌های ارشمیدسی مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج این مطالعه نشانگر توانایی بالای رویکرد کاپیولا در توصیف ساختارهای غیرخطی با انواع وابستگی‌های دمی است. بنابراین کاپیولای فضایی، پتانسیل بالا برای تبدیل به روش زمین‌آماری متداول را دارد. روش کاپیولا نسبت به کریجینگ، خطای کمتری در محاسبه مقدار میانگین داده‌ها و دقت بالاتری دارد. به طوری که در ۶ مورد از ۷ متغیر ارزیابی شده، میانگین برآوردهای کاپیولا نسبت به روش کریجینگ به میانگین داده‌های مشاهده شده، نزدیکتر است. برای کلیه متغیرها، روش کاپیولا خطای میانگین مربعات به مراتب کوچکتری نسبت به روش کریجینگ دارد، ضریب همبستگی مابین مقادیر مشاهده‌ای و تخمینی در روش کاپیولا بزرگتر از روش کریجینگ بوده و توزیع احتمال نتایج کاپیولا به توزیع احتمال داده‌ها نزدیک‌تر است. توزیع حاشیه‌ای متغیرهای مورد بررسی نقش مهمی در عملکرد روش کریجینگ دارد، چنانچه با دور شدن توزیع داده‌ها از توزیع نرمال از صحت و دقت این روش کاسته می‌شود. دیگر عامل موثر در این زمینه نسبت مولفه تصادفی در کل ساختار تغییرپذیری است، به طوری که با افزایش اثرقطعه‌ای، کارایی کریجینگ کمتر می‌شود. در مقابل، روش کاپیولا، تاثیرپذیری جزئی از توزیع حاشیه‌ای دارد و با افزایش اثرقطعه‌ای داده‌ها برتری بیشتری نسبت به کریجینگ از خود نشان می‌دهد.

به کارگیری هر دو روش کاپیولا و کریجینگ، درجه پیچیدگی یکسانی دارد، به طوری که در هر دو روش نیاز به برآزش ساختار فضایی یا از طریق واریوگرام و یا از طریق نمودارهای ضریب همبستگی تای کندال و نسبت چگالی کاپیولای‌های گامبل و کلیتون،

واریوگرام‌های مولیبدن، آهن و گوگرد دارای ساختارهای تودرتو متشکل از اثرقطعه‌ای، یک مدل نمایی کوتاه برد و یک مدل کروی دوربرد است. ساختار فضایی مس با اثرقطعه‌ای و دو مدل نمایی برازش شده است. در ساختار فضایی مس و مولیبدن ناهمسانگردی هندسی با دامنه تاثیر کوچکتر در جهت قائم دیده می‌شود.

۲-۳-۲- اعتبارسنجی متقابل

در تخمین عیار مس که دارای کمترین میزان چولگی و کشیدگی در مجموعه داده شماره ۲ است، مقدار میانگین نتایج کاپیولا و کریجینگ معمولی نشانگر میانگین نارایب بودن هر دو روش است. به طوری که هر دو روش به طرز بسیار خوبی مقدار مطلوب ۰/۷ درصد را برآورد کرده‌اند (جدول ۴). در برآورد مقدار میانگین آهن، کریجینگ به صورت بسیار جزئی عملکرد بهتری نسبت به رویکرد کاپیولا از خود نشان داده است. در مقابل، روش کاپیولا کارایی به مراتب بهتری در تخمین میانگین گوگرد و به ویژه مولیبدن داشته است. با افزایش مقدار کشیدگی و چولگی داده‌ها، برتری روش کاپیولا در تخمین مقدار میانگین داده‌ها بیشتر نمایان می‌شود. البته این مساله ممکن است در ارتباط با سهم اثرقطعه‌ای در ساختار فضایی متغیرهای مورد بررسی باشد. یعنی با افزایش اثرقطعه‌ای، خطای محاسبه مقدار میانگین با استفاده از کریجینگ به شدت افزایش می‌یابد، در مقابل در عملکرد روش کاپیولا تغییر چندانی ایجاد نمی‌شود. برای تمام متغیرها، خطای میانگین مربعات با مقدار مطلوب صفر، برای نتایج کاپیولا کمتر از روش کریجینگ به دست آمده است. به عنوان مثال، در مورد گوگرد، روش کاپیولا و کریجینگ به ترتیب با مقادیر ۱/۱۷ و ۱/۵۱، برتری محسوس رویکرد کاپیولا بر روش کریجینگ معمولی را نشان می‌دهد. نسبت خطای میانگین مربعات کریجینگ به خطای میانگین مربعات کاپیولا، همبستگی شدید با مقدار مطلق کشیدگی و چولگی داده‌ها دارد. بدین معنی که با افزایش مقدار مطلق کشیدگی و چولگی داده‌ها، کاپیولا عملکرد بهتری از این جهت نسبت به کریجینگ از خود نشان می‌دهد. از دیگر عوامل موثر در این زمینه می‌توان به نسبت اثرقطعه‌ای به سقف واریوگرام اشاره کرد، به طوری که با افزایش میزان اثرقطعه‌ای، از دقت روش کریجینگ بیشتر کاسته می‌شود. ضریب همبستگی نتایج تخمینی با داده‌های واقعی برای روش کاپیولا نسبت به روش کریجینگ به مقدار مطلوب حداکثر ۱+ نزدیکتر است.

برای عناصر مس، آهن و گوگرد، نمودار پراکندگی مقادیر تخمینی در مقابل مقادیر واقعی ارایه شده در شکل ۱۰، نشانگر

وجود دارد. بنابراین، با توجه به مزایای کاپیولا، استفاده از این روش به جای کریجینگ معمولی در تخمین متغیرهای دارای ساختار فضایی، توصیه می‌شود. البته کریجینگ‌های غیرخطی مانند کریجینگ شاخص دارای برتری‌هایی نسبت به انواع کریجینگ‌های خطی است، به همین دلیل مقایسه کاپیولا و روش‌های یاد شده به مطالعات آینده موکول می‌شود.

جدول ۲- پارامترهای مدل واریوگرام مجموعه داده شماره ۱.

متغیر	مدل واریوگرام	اثرقطعه‌ای	سقف	دامنه تأثیر (متر)
مقاومت فشاری تک‌محوره	نمایی	۱۴۰	۲۳۰	۱۶۰
مدول الاستیک	کروی	۱۰	۱۲٫۶۷	۳۵
تخلخل	کروی	۱۷	۵	۵۰

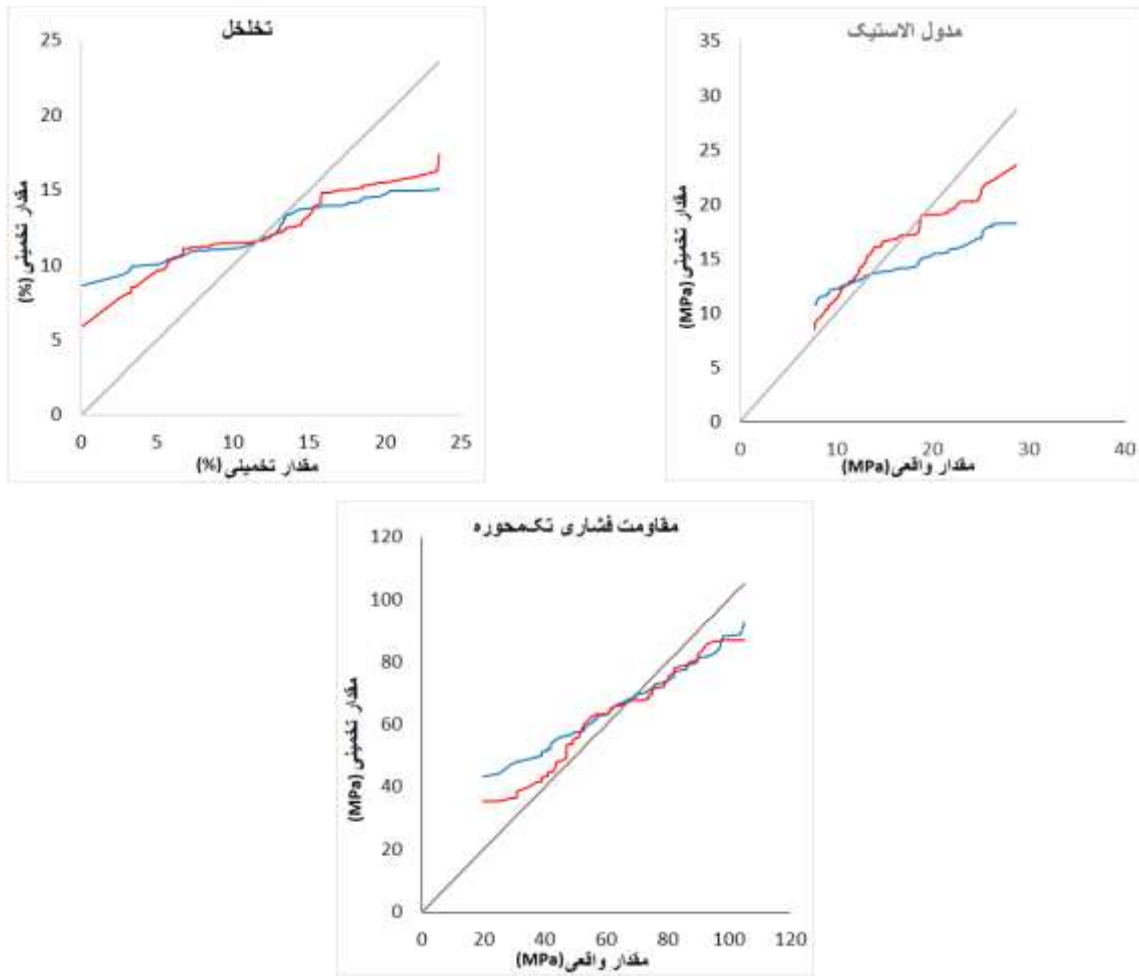
جدول ۳- پارامترهای مدل واریوگرام مجموعه داده شماره ۲.

متغیر	نوع واریوگرام	C0	ساختار ۱			ساختار ۲	
			مدل	C1	R	مدل	C2
مس	قائم	۰٫۰۲	نمایی	۰٫۰۸	۲۶	نمایی	۰٫۰۶
	غیرجهتی				۷۰		
مولیبیدن	قائم	۱۰۰۰۰	نمایی	۱۵۵۰۰	۲۵	کروی	۲۰۰۰۰
	غیرجهتی				۱۷۰		
آهن	غیرجهتی	۰٫۲	نمایی	۰٫۶	۱۵	کروی	۰٫۷۶
گوگرد	غیرجهتی	۰٫۶	نمایی	۰٫۵	۲۰	کروی	۱٫۳

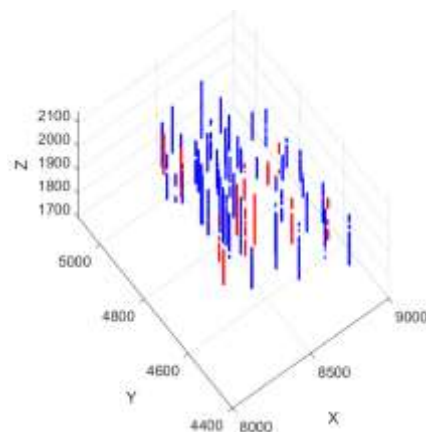
۱-C0: اثر قطعه‌ای؛ ۲-C1: مقدار سقف ساختار اول؛ ۳-R: دامنه تأثیر (متر).

جدول ۴- نتایج اعتبارسنجی متقابل.

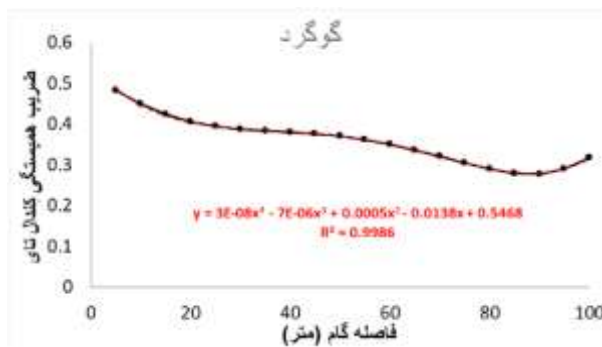
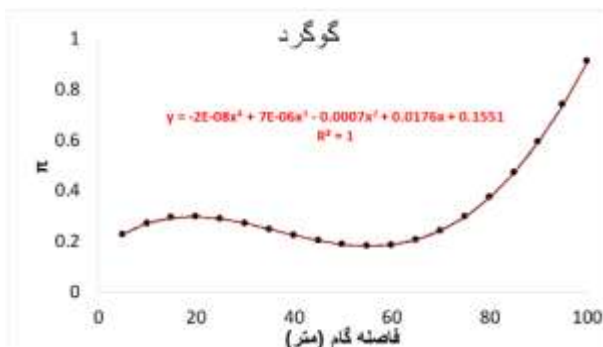
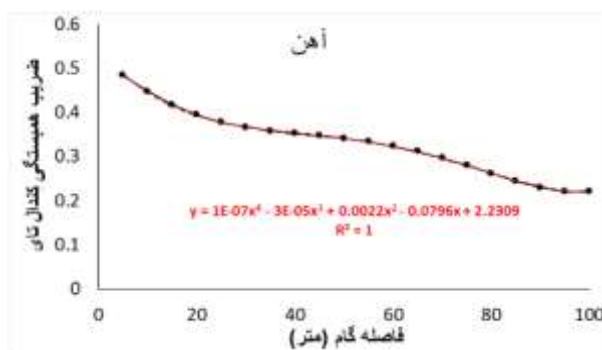
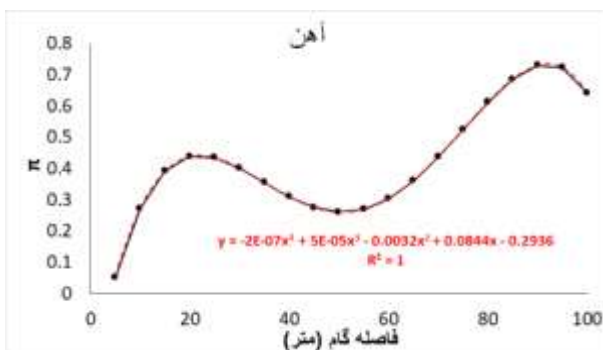
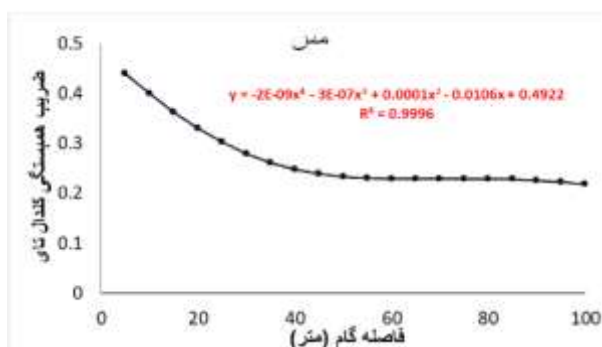
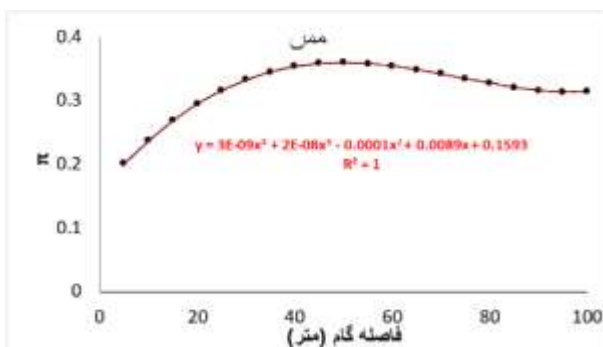
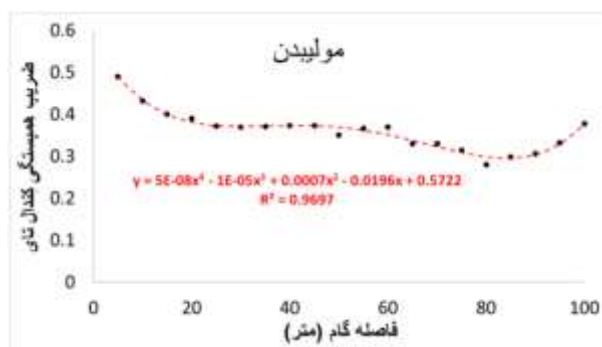
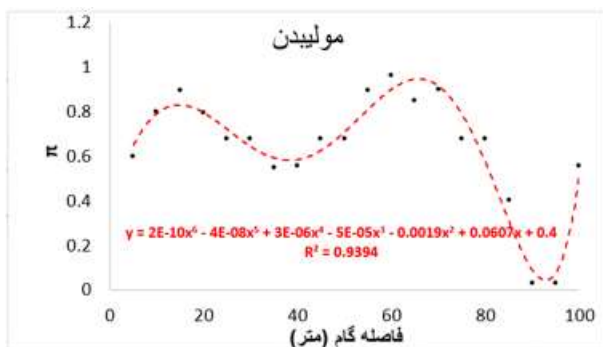
متغیر (واحد)	روش تخمین	میانگین	ضریب همبستگی	خطای میانگین مربعات
مقاومت فشاری تک‌محوره (مگاپاسکال)	کاپیولا	۶۳٫۳۴	۰٫۱۵	۴۸۵٫۴۰
	کریجینگ	۶۵٫۴۵	-۰٫۰۹	۵۳۶٫۴۰
	مقدار مطلوب	۶۳٫۳۵	۱	۰
مدول الاستیک (مگاپاسکال)	کاپیولا	۱۵٫۸۰	۰٫۲۶	۴۳٫۷۰
	کریجینگ	۱۵٫۸۴	۰٫۱۵	۴۹٫۱۰
	مقدار مطلوب	۱۵٫۵۷	۱	۰
تخلخل (درصد)	کاپیولا	۱۲٫۲۷	۰٫۱۵	۲۶٫۲۵
	کریجینگ	۱۲٫۳۷	۰٫۰۱	۲۷٫۴۳
	مقدار مطلوب	۱۲٫۲۵	۱	۰
مولیبیدن (ppm)	کاپیولا	۲۲۱٫۸۷	۰٫۴۱	۴۲۳۶۵
	کریجینگ	۲۸۶٫۰۴	۰٫۳۸	۵۳۲۵۳
	مقدار مطلوب	۲۲۲٫۱۵	۱	۰
مس (درصد)	کاپیولا	۰٫۷۰	۰٫۳۷	۰٫۱۵
	کریجینگ	۰٫۷۰	۰٫۲۹	۰٫۱۶
	مقدار مطلوب	۰٫۷۰	۱	۰
آهن (درصد)	کاپیولا	۲٫۸۷	۰٫۳۸	۱٫۰۶
	کریجینگ	۲٫۸۴	۰٫۳۰	۱٫۱۴
	مقدار مطلوب	۲٫۸۳	۱	۰
گوگرد (درصد)	کاپیولا	۲٫۴۹	۰٫۴۹	۱٫۱۷
	کریجینگ	۲٫۷۸	۰٫۴۰	۱٫۵۱
	مقدار مطلوب	۲٫۵۶	۱	۰



شکل ۵- نمودارهای پراکندگی مقادیر تخمینی در مقابل مقادیر واقعی برای مجموعه داده شماره ۱، روش کاپیولا (قرمز رنگ) و روش کریجینگ (آبی رنگ).

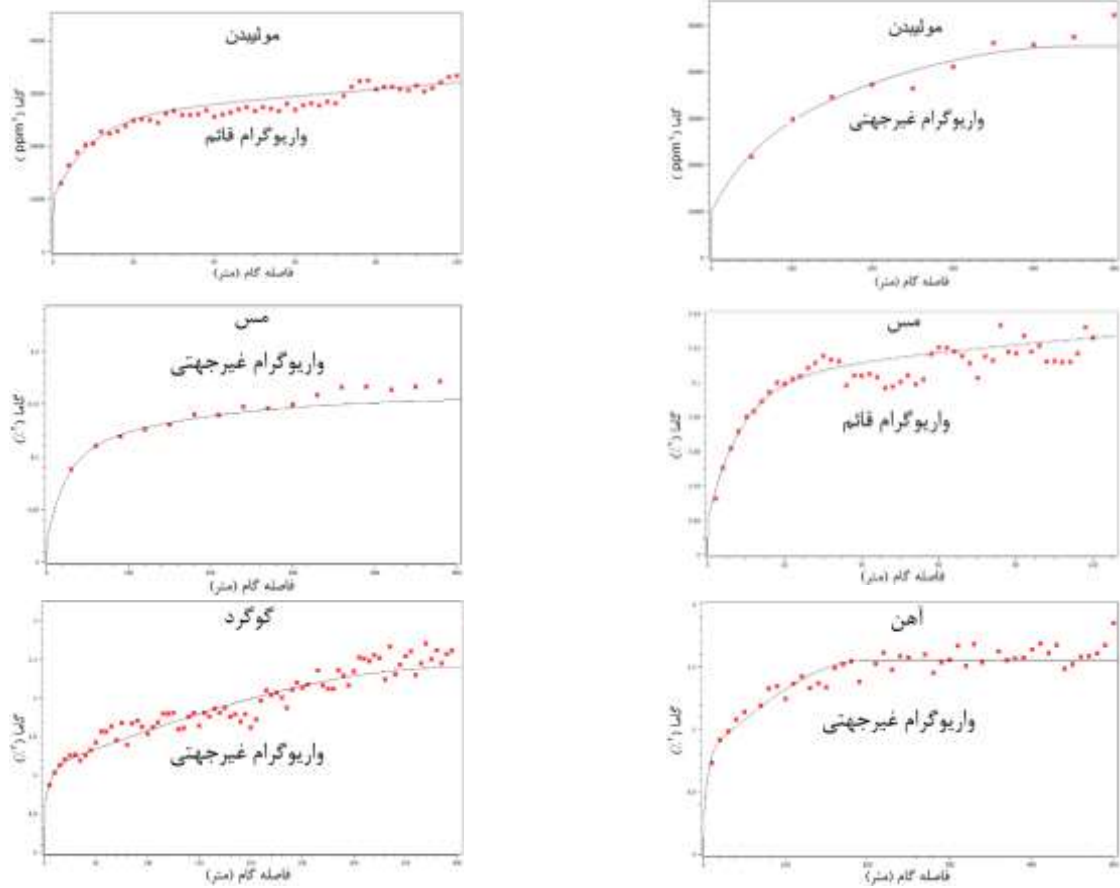


شکل ۶- موقعیت سه‌بعدی گمانه‌های حفاری شده در کانسار مس پورفیری مجموعه داده (آبی رنگ) و مجموعه اعتبارسنجی متقابل (قرمز رنگ).

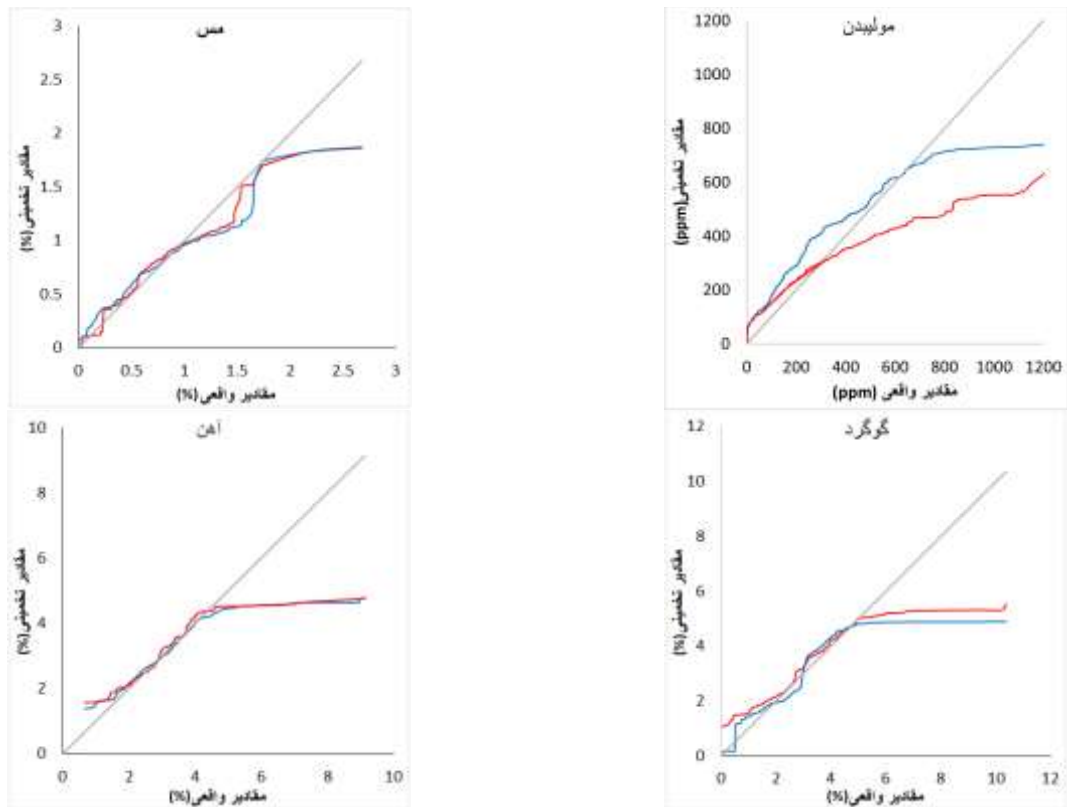


شکل ۸- نمودار ضرایب π (نقاط سیاه رنگ) به همراه مدل برازش شده (خط بریده قرمز رنگ).

شکل ۷- نمودار ضرایب همبستگی رتبه‌ای کندال (نقاط سیاه رنگ) به همراه مدل برازش شده (خط بریده قرمز رنگ).



شکل ۹- واریوگرام‌های تجربی (نقاط قرمز رنگ) مجموعه داده شماره ۲ به همراه مدل‌های برازش شده (خطوط سیاه رنگ).



شکل ۱۰- نمودارهای پراکندگی مقادیر تخمینی در مقابل مقادیر واقعی برای مجموعه داده شماره ۲. روش کاپیولا (قرمز رنگ) و روش کریجینگ (آبی رنگ).

منابع

12. Durocher, M., Chebana, F. and Ouarda, T.B.M.J., 2016. On the prediction of extreme flood quantiles at ungauged locations with spatial copula. *Journal of Hydrology*, 533, pp.523–532.
13. Kopacz, M., Kryzia, D., and Kryzia, K., 2017. Assessment of sustainable development of hard coal mining industry in Poland with use of bootstrap sampling and copula-based Monte Carlo simulation. *Journal of Cleaner Production*, 159, pp.359–373.
14. Frahm, G., Junker, M. and Szimayer, A., 2003. Elliptical copulas: applicability and limitations. *Statistics & Probability Letters*, 63(3), pp.275–286.
15. Li, D., and Peng, L., 2009. Goodness-of-fit test for tail copulas modeled by elliptical copulas. *Statistics & Probability Letters*, 79(8), pp.1097–1104.
16. Hashorva, E., and Jaworski, P., 2012. Gaussian approximation of conditional elliptical copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, 111, pp.397–407.
17. Li, C., Huang, Y., and Zhu, L., 2017. Color texture image retrieval based on Gaussian copula models of Gabor wavelets. *Pattern Recognition*, 64, pp.118–129.
18. Nelsen, R.B., 2006, *An introduction to Copulas*, Springer, New York.
19. Joe, H., 1997. *Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts*. C&H/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability.
20. Bardossy, A., 2006. Copula-based geostatistical models for groundwater quality parameters. *Water Resources Research*, 42(11).
21. Bardossy, A., Li, J., 2008. Geostatistical interpolation using copulas. *Water Resources Research*, 44(7).
22. Atalay, F., and Tercan, A.E., 2017. Coal resource estimation using Gaussian copula. *International Journal of Coal Geology*, 175, pp.1–9.
23. Demarta, S., and McNeil, A.J., 2007. The t Copula and Related Copulas. *International Statistical Review*, 73(1), pp.111–129.
24. Bacigál, T., Mesiar, R., and Najjari, V., 2015. Generators of copulas and aggregation. *Information Sciences*, 306, pp.81–87.
1. Li, D.-Q., Zhang, L., Tang, X.-S., Zhou, W., Li, J.-H., Zhou, C.-B., and Phoon, K.-K., 2015. Bivariate distribution of shear strength parameters using copulas and its impact on geotechnical system reliability. *Computers and Geotechnics*, 68, 184–195.
2. Zhu, H., Zhang, L. M., Xiao, T., and Li, X.Y., 2017. Generation of multivariate cross-correlated geotechnical random fields. *Computers and Geotechnics*, 86, 95–107.
3. Lourme, A., Maurer, F., 2017. Testing the Gaussian and Student's t copulas in a risk management framework. *Economic Modeling*, 67, pp.203–214.
4. Guo, N., Wang, F. and Yang, J., 2017. Remarks on composite Bernstein copula and its application to credit risk analysis. *Insurance: Mathematics and Economics*, 77, pp.38–48.
5. Gong, Y., Chen, Q. and Liang, J., 2018. A mixed data sampling copula model for the return-liquidity dependence in stock index futures markets. *Economic Modelling*, 68, pp.586–598.
6. Marchant, B. P., Saby, N. P. A., Jolivet, C. C., Arrouays, D., and Lark, R. M., 2011. Spatial prediction of soil properties with copulas. *Geoderma*, 162(3-4), 327–334.
7. Hernández-Maldonado, V., Díaz-Viera, M., Erdely, A., 2014. A multivariate Bernstein copula model for permeability stochastic simulation. *Geofísica Internacional*, 53(2), pp.163–181.
8. Musafér, G. N., & Thompson, M. H., 2016. Optimal adaptive sequential spatial sampling of soil using pair-copulas. *Geoderma*, 271, 124–133.
9. Musafér, G. N., Thompson, M. H., Kozan, E., and Wolff, R. C. (2016). Spatial Pair-Copula Modeling of Grade in Ore Bodies: A Case Study. *Natural Resources Research*, 26(2), 223–236.
10. Musafér, G. N., Thompson, M. H., Wolff, R. C., and Kozan, E., 2017. Nonlinear Multivariate Spatial Modeling Using NLPCA and Pair-Copulas. *Geographical Analysis*, 49(4), 409–432.
11. Durocher, M., and Quessy, J.-F., 2017. Goodness-of-fit tests for copula-based spatial models. *Environmetrics*, 28(5), e2445.

- Assessment, 24(5), pp.661–673.
30. Sklar, A., 1959. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 8: 229–231.
 31. Embrechts, P., McNeil, A. and Straumann, D., 2002. Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls. In *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Dempster, M. (Ed.), *Cambridge University Press*, Cambridge, 176–223.
 32. Cherubini, U., Luciano, E., and Vecchiato, W., 2004. *Copula Methods in Finance*.
 33. Haslauer, C.P., Li, J., and Bárdossy, A., 2010. Application of Copulas in Geostatistics. *geoENV VII – Geostatistics for Environmental Applications*, pp.395–404.
 25. Helbin, P., Baczyński, M., Grzegorzewski, P., and Niemyska, W., 2019. Some properties of fuzzy implications based on copulas. *Information Sciences*, 502, 1–17.
 26. Sohrabian, B., 2020. Geostatistical prediction through convex combination of Archimedean copulas. *Spatial Statistics*, In press.
 27. Gräler, B., 2014. Modelling skewed spatial random fields through the spatial vine copula. *Spatial Statistics*, vol. 10, pp. 87–102.
 28. Journel, A. G., and Alabert, F., 1989. Non-Gaussian data expansion in the Earth sciences, *Terra Nova*, 1, 123 – 134.
 29. Kazianka, H. and Pilz, J., 2009. Copula-based geostatistical modeling of continuous and discrete data including covariates. *Stochastic Environmental Research and Risk*