نشریه علمی-پژوهشی "مهندسی معدن"

دوره سوم، شماره پنجم، سال ۱۳۸۷، صفحه ۱ تا ۱۰

Iranian Journal of Mining Engineering
(IRJME)

Vol. 3, No. 5, 2008, pp. 1-10

# روش جدیدی برای حل مدل Lane جهت تعیین عیارحد بهینه کارخانه

احمد جعفرنژاد[۱] ؛ علی اصغر خدایاری[۲*]

۱. دانشیار دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، jafarnjd@ut.ac.ir
۲. مربی دانشکده مهندسی معدن، دانشگاه تهران، khodaiar@ut.ac.ir

*(دریافت ۱۹ مرداد ۱۳۸۷ ، پذیرش ۱۱ آبان ۱۳۸۷)*

## چکیده

**پس از طراحی محدوده نهایی معادن روباز یکی از اولین تصمیمات ضروری در چارچوب برنامه‌ریزی تولید، تعیین عیارحد کارخانه است. با توجه به نقش اساسی عیارحد کارخانه بر روی اقتصاد عملیات، انتخاب بهینه این عیار اهمیت زیادی دارد. یکی از روش‌های رایج برای تعیین عیارحد بهینه کارخانه استفاده از مدل Lane است. این مدل یک مدل پژوهش عملیاتی است که تابع هدف آن بیشینه‌سازی تفاضل نقدینگی و هزینه فرصت بوده، و محدودیت‌های وظیفه‌ای آن ظرفیت معدن‌کاری، ظرفیت کارخانه فرآوری و ظرفیت بازار (تقاضا) می‌باشد. با توجه به رابطه بین متغیرها، این مدل در نهایت به مدلی با دو متغیر تصمیم $g_c$ (عیار حد) و $T$ (زمان لازم برای عملیات بر روی یک تن ماده کانی‌دار) تبدیل می‌شود. حل تحلیلی این مدل نیازمند صورت‌بندی ریاضی $x$ (میزان کانسنگ موجود در یک تن ماده کانی‌دار) و $\bar{g}$ (عیار متوسط کانسنگ) برحسب $g_c$ می‌باشد. با توجه به این‌که این صورت‌بندی معمولاً امکان‌پذیر نمی‌باشد، برای حل آن باید از روش ترسیمی یا روشی ابتکاری بهره جست. Lane برای حل این مدل روشی ابتکاری ارایه داده است. در این مقاله با تحلیل نحوه تغییر تابع هدف در محدوده‌های مختلف عیاری، یک روش حل ابتکاری جدید پیشنهاد شده است. در نهایت با حل یک مثال نمایشی و مقایسه نتایج به دست آمده از این روش با نتایج حاصل از الگوریتم حل Lane، که در حال حاضر روش حل کلاسیک این مسئله به‌شمار می‌رود، نشان داده شد که پاسخ به دست آمده در روش ارایه شده در این مقاله نتایج بهتری نسبت به الگوریتم Lane به‌دست می‌دهد.**

## کلمات کلیدی

**بهینه‌سازی، عیارحد، معدن روباز، الگوریتم Lane**

---

* عهده‌دار مکاتبات

## ۱- مقدمه

یکی از بحرانی‌ترین پارامترها در عملیات معدن‌کاری، عیارحد است. تایلور عیار حد را به‌عنوان هر عیاری که به هر دلیل خاص برای تفکیک دو نوع فعالیت بر روی مواد (مثل معدن‌کاری یا عدم معدن‌کاری، ارسال به کارخانه یا عدم ارسال به کارخانه، ...) مورد استفاده قرار می‌گیرد، تعریف کرده است [۱] و[۲].

یکی از اولین تصمیماتی که باید پس از تعیین محدوده نهایی یک معدن روباز[۱] در چارچوب برنامه‌ریزی تولید، گرفته شود، تعیین عیارحد کارخانه است. عیارحد کارخانه را به‌عنوان عیاری که در یک کانسار مفروض برای تفکیک کانسنگ[۲] و باطله[۳] مورد استفاده قرار می‌گیرد، تعریف کرده‌اند. آن بخش از مواد موجود در درون ذخیره معدنی که عیار آن بالاتر از عیارحد باشد به‌عنوان کانسنگ، و آن بخش از مواد که عیار آن پایین‌تر از عیارحد باشد به‌عنوان باطله طبقه‌بندی می‌گردد. کانسنگ بخش اقتصادی ذخیره بوده و برای سنگ‌شکنی، آسیا و پرعیارسازی به کارخانه فرآوری ارسال گردیده و نهایتاً به محصول قابل فروش عملیات تبدیل می‌شود، و باطله به انباشتگاه باطله معدن ارسال شده و سودی عاید معدن نمی‌کند [۳].

عیارحد پایه‌ای را برای تعیین تناژ کانسنگ و باطله فراهم آورده و به این‌ترتیب مستقیماً بر گردش نقدینگی عملیات معدنی تأثیر می‌گذارد. عیارحد بالاتر موجب افزایش عیار متوسط کانسنگ ورودی به کارخانه شده و در نتیجه موجب تحقق ارزش خالص بیش‌تری از واحد کانسنگ می‌گردد [۳].

برخی از پژوهشگران معیار عیارحد سربه‌سری[۴] را به‌عنوان ماده‌ای که قادر به پرداخت هزینه‌های معدن‌کاری و فرآوری خود می‌باشد، برای تعریف کانسنگ مورد استفاده قرار داده‌اند. هرچند، این ملاک بهینه نیست، در حالی که برنامه‌ریزان معدن به‌دنبال بهینه‌سازی عیارحد برای رسیدن به اهداف موردنظر خود (مثلاً بیشینه کردن ارزش خالص فعلی عملیات) هستند [۴].

از آن‌جایی که عیارحد می‌تواند به‌طور مستقیم بر هدف موردنظر از عملیات تأثیر بگذارد، لذا تلاش برای انتخاب عیارحد بهینه از اهمیت بالایی برخوردار است. عیارحد بهینه تحت تأثیر تمام جنبه‌های فنی معدن‌کاری از قبیل ظرفیت معدن‌کاری، ظرفیت کارخانه، شکل هندسی کانسار و زمین‌شناسی آن قرار دارد [۵].

عیارحد، وقتی که هدف از بهینه‌سازی آن بیشینه‌سازی ارزش خالص فعلی یا نقدینگی باشد، شدیداً تحت تأثیر تغییرات قیمت قرار دارد، و یکی از مهم‌ترین موضوعات مورد ابتلای مدیریت شرکت‌های معدنی تعیین چگونگی تغییر عیارحد در پاسخ به تغییرات قیمت می‌باشد [۶] و [۷].

بهینه‌سازی عیارحد می‌تواند با اهداف متفاوتی صورت پذیرد. هدفی که تاکنون بیشتر مورد توجه قرار گرفته، بیشینه‌سازی سود یا ارزش خالص فعلی بوده است. یکی از معمول‌ترین روش‌های تعیین عیارحد بهینه کارخانه، با هدف بیشینه‌سازی سود یا ارزش خالص فعلی الگوریتم Lane[۵] است، که اولین بار در سال ۱۹۶۴ توسط Lane طی مقاله‌ای، که بعدها به یک مقاله کلاسیک تحت عنوان "انتخاب عیارحد بهینه" تبدیل شد، ارایه گردید[۸]. این الگوریتم اکنون نیز بیشترین کاربرد را در تعیین عیارحد بهینه معادن روباز دارد.

مدل مورد استفاده در این الگوریتم یک مدل پژوهش عملیاتی[۶] است، و از یک تابع هدف و سه محدودیت تشکیل شده است. تابع هدف مدل بیشینه کردن تفاضل نقدینگی و هزینه فرصت می‌باشد، که نهایتاً به بیشینه شدن ارزش خالص فعلی می‌انجامد. ظرفیت معدن‌کاری، ظرفیت کارخانه فرآوری و ظرفیت بازار (تقاضا) سه محدودیت وظیفه‌ای این مدل را تشکیل می‌دهند. [۹] و [۱۰]

این مدل یک مدل غیرخطی بوده، و معمولاً امکان صورت‌بندی تابع هدف و محدودیت‌های آن به‌صورت عبارات ریاضی وجود ندارد. Lane علاوه بر صورت‌بندی این مدل یک روش ابتکاری نیز برای حل آن ارایه داده است. در این مقاله رویکرد جدیدی برای حل مدل ارایه شده و با حل یک مثال به روش Lane و رویکرد ارایه شده در این مقاله، نتایج حاصل از دو روش باهم مقایسه خواهند شد.

## ۲- تعریف مسئله

همان‌طوری که گفته شد مسئله مورد بحث در این مقاله بهینه‌سازی عیارحد کارخانه با هدف بیشینه‌سازی تفاضل نقدینگی و هزینه فرصت می‌باشد. این مسئله را می‌توان در قالب یک مدل پژوهش عملیاتی (غیرخطی) با یک تابع هدف بیشینه‌سازی و سه محدودیت وظیفه‌ای صورت‌بندی کرد.

### ۲-۱- تعریف پارامترها و متغیرهای تصمیم مدل

پیش از معرفی مدل، پارامترها و متغیرهای تصمیم مورد استفاده در آن تعریف می‌گردد.

$Q_m$: تناژ کل مواد موجود در محدوده نهایی، که مقدار ثابتی است.

$g_c$: عیارحد، که متغیر تصمیم اصلی مدل می‌باشد.

$\overline{g}$: عیار متوسط کانسنگ، که با افزایش عیارحد افـزایش می‌یابد، و درنتیجه تابعی اکیداً صعودی از عیارحد است.

$y$: راندمان عملیات، که مقدار ثابتی است.

$Q_h$: تناژ کل کانسنگ درون محدوده نهایی، که بـا کـاهش عیارحد افزایش می‌یابد، و درنتیجه تابعی اکیداً نزولی از عیارحد است

$x$: نسبت میزان کانسنگ به کـل مـواد درون کـاواک یـا کانسنگ موجود در واحد مواد کانی‌دار، که بـا کـاهش عیارحـد افزایش می‌یابد، و درنتیجه تابعی اکیداً نزولی از عیارحد است:

$$x = \frac{Q_h}{Q_m} \qquad (۱)$$

مقدار $x$ همواره بین صفر و ۱ قرار دارد.

$Q_k$: تناژ کل محصول تولیدی، که‌تـابع میـزان کانـسنگ و عیار متوسط آن است. با توجه بـه ایـن‌کـه بـا کـاهش عیارحـد میزان کانسنگ ارسالی به کارخانه، و درنتیجـه میـزان محـصول تولیدی افزایش می‌یابد، لذا این کمیـت تـابعی اکیـداً نزولـی از عیارحد است [۹]:

$$Q_k = y\,\overline{g}\,Q_h = y\,Q_m\,\overline{g}\,x \qquad (۲)$$

$u$: نسبت میزان محصول بـه کـل مـواد درون کـاواک یـا محصول حاصل از واحد ماده کانی‌دار، که‌تابع میزان کانـسنگ و عیار متوسط آن است. با توجه بـه ایـن‌کـه بـا کـاهش عیارحـد میزان کانسنگ موجود در واحد ماده کانی‌دار، و درنتیجه میـزان محصول تولیدی افزایش می‌یابد، لذا ایـن کمیـت تـابعی اکیـداً نزولی از عیارحد است:

$$u = \frac{Q_k}{Q_m} = y\,\overline{g}x \qquad (۳)$$

همچنین، با توجه بـه ایـن‌کـه بـا افـزایش $x$ میـزان کانـسنگ موجـود در واحـد مـاده کـانی‌دار، و درنتیجـه میـزان محـصول تولیدی افزایش می‌یابد، لذا این کمیـت تـابعی اکیـداً صـعودی از $x$ است.

مقـدار $u$ همـواره بـین صـفر و $y\,\overline{g_0}$ قـرار دارد، کـه $\overline{g_0}$ عیارمتوسط کل مواد درون کاواک می‌باشد.

$m$: هزینه معدن‌کـاری هـرتن مـاده (اعـم از کانـسنگ و باطله)، که مقدار ثابتی است.

$h$: هزینه فرآوری هرتن کانسنگ، که مقدار ثابتی است.

$k$: هزینه ذوب، تصفیه و فروش واحد محصول، که مقدار ثابتی است.

$p$: قیمت فروش واحد محصول، که مقدار ثابتی است.

$f$: هزینه عملیاتی ثابت سالانه، که مقدار ثابتی است.

$\delta$: نرخ بهره سالانه، که مقدار ثابتی است.

$F$: هزینه فرصت سالانه که به نرخ بهـره و ارزش خـالص فعلی مواد باقی‌مانده بستگی دارد. این هزینه از نقدینگی انتقـال یافته به آینده در اثر محدودیت‌های عملیاتی ناشی می‌شود، و از رابطه زیر به دست می‌آید [۹]:

$$F = \delta V - \frac{dV}{dT} \qquad (۴)$$

($V$ ارزش خالص مواد باقی‌مانده و انتقالی به آینده است.)

دررابطه فوق، مؤلفه اول بیانگر نقدینگی از دسـت رفتـه در اثـر انتقال سود بالقوه مواد باقی‌مانـده در معـدن بـه آینـده بـوده، و مؤلفه دوم بازنمایی کننده استهلاک ذخیره دراثر بهره‌بـرداری از آن می‌باشد.

$T$: زمان لازم برای عملیات بر روی یک تن ماده کانی‌دار، که تـابع عیارحـد و محـدودیت‌هـای وظیفـه‌ای بـوده و یکـی از متغیرهای تصمیم مدل می‌باشد. با توجه بـه ایـن تعریـف عمـر معدن برابر $Q_m T$ خواهد بود.

$M$: حداکثر ظرفیت سالانه معدن‌کاری، که مقـدار آن بـه ظرفیت ماشین‌آلات چال‌زنی و آتـشباری، و بـارگیری و بـاربری بستگی دارد.

$H$: حداکثر ظرفیت سـالانه کارخانـه، کـه مقـدار آن بـه ظرفیت دستگاه‌های درگیر در عملیات فرآوری بستگی دارد.

$K$: تقاضای سالانه، که مقدار ثابتی است.

$g_{mh}$: عیارحـد تعـادلی معـدن‌کـاری- فـرآوری، کـه اگـر عیارحد کارخانه معـادل ایـن مقـدار درنظـر گرفتـه شـود، هـم معدن‌کاری و هم کارخانه با حداکثر ظرفیت کار خواهنـد کـرد. یعنی:

$$x = \frac{H}{M} \Leftrightarrow g_c = g_{mh} \qquad (۵)$$

$g_{mk}$: عیارحد تعادلی معدن‌کاری- بازار، که اگـر عیارحـد کارخانه معادل این مقدار درنظر گرفته شود، ضمن تـأمین کـل تقاضای بازار، معدن‌کاری با حداکثر ظرفیـت کـار خواهـد کـرد. یعنی:

$$u = \frac{K}{M} \Leftrightarrow g_c = g_{mk} \qquad (۶)$$

$g_{hk}$: عیارحد تعادلی معدن‌کاری- بازار، کـه اگـر عیارحـد کارخانه معادل این مقدار درنظر گرفته شود، ضمن تـأمین کـل تقاضای بـازار کارخانـه بـا حـداکثر ظرفیـت کـار خواهـد کـرد. به‌عبارت دیگر:

$$\frac{u}{x}=\frac{K}{H} \Leftrightarrow g_c = g_{hk} \qquad (۷)$$

$g_m$: عیارحد محدودکننده اقتصادی با فرض مؤثر بودن محدودیت معدن‌کاری، که اگر عیارحد کارخانه معادل این مقدار درنظر گرفته شود، با فرض عدم وجود محدودیت‌های فرآوری و فروش، تابع هدف بیشینه خواهد شد.

$g_h$: عیارحد محدودکننده اقتصادی با فرض مؤثر بودن محدودیت کارخانه، که اگر عیارحد کارخانه معادل این مقدار درنظر گرفته شود، با فرض عدم وجود محدودیت‌های معدن‌کاری و فروش، تابع هدف بیشینه خواهد شد.

$g_k$: عیارحد محدودکننده اقتصادی با فرض مؤثر بودن محدودیت فروش، که اگر عیارحد کارخانه معادل این مقدار درنظر گرفته شود، با فرض عدم وجود محدودیت‌های معدن‌کاری و فرآوری، تابع هدف بیشینه خواهد شد.

## ۲-۲- صورت‌بندی مدل

### الف- تابع هدف مدل

همان‌طوری که گفته شد در این‌جا هدف از بهینه‌سازی عیارحد، بیشینه‌سازی تفاضل نقدینگی و هزینه فرصت است، که نهایتاً به بیشینه شدن ارزش خالص فعلی می‌انجامد.

اگر نقدینگی حاصل از کاهش یک واحد از ذخیره در مدت زمان $T$ برابر $C$ باشد، بهترین عیار کارخانه عیاری است که در اثر آن تفاضل بین نقدینگی حاصل و هزینه فرصت از دست رفته در دوره $T$ یعنی $C-FT$ بیشینه گردد. به‌عبارت‌دیگر، هدف بهینه‌سازی عیارحد بیشینه‌سازی $C-FT$ می‌باشد.

در عملیات معدن‌کاری نقدینگی ناشی از بالفعل کردن یک واحد ماده موجود در معدن از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$C=(p-k)u-xh-m-fT \qquad (۸)$$

بنابراین، تابع هدف مدل رابا توجه به نمادهای پیش‌گفته با عبارت ریاضی زیر می‌توان بازنمایی نمود [۹]:

$$\begin{aligned} &\text{Max } P=C-FT \\ &\text{Max } P=(p-k)u-m \\ &\qquad -hx-(F+f)T \end{aligned} \qquad (۹)$$

در رابطه فوق $P$ تفاضل بین نقدینگی و هزینه فرصت است.

### ب- محدودیت‌های مدل

فرض بر این است مسئله با سه محدودیت وظیفه‌ای معدن‌کاری، فرآوری‌وفروش مواجه می‌باشد. این محدودیت‌ها را با توجه به نمادهای پیش‌گفته می‌توان به‌صورت زیر صورت‌بندی کرد:

$$\begin{aligned} &T \ge \frac{1}{M} \\ &T \ge \frac{x}{H} \\ &T \ge \frac{u}{K} \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

سه محدودیت فوق را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

$$T \ge \max\left[\frac{1}{M}, \frac{x}{H}, \frac{u}{K}\right]$$

بنابراین مدل نهایی مسئله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} &\text{Max } P=(p-k)u-m \\ &\qquad -hx-(F+f)T \\ &\qquad s.t. \\ &\qquad T \ge \max\left[\frac{1}{M}, \frac{x}{H}, \frac{u}{K}\right] \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

همان‌طوری که قبلاً گفته شد، $x$ و $\overline{g}$ تابع عیارحد بوده، و $u$ نیز طبق رابطه ۳ تابعی از $x$ و $\overline{g}$ می‌باشد. چنان‌چه بتوان رابطه بین این کمیت‌ها با عیارحد را به‌صورت روابط ریاضی بازنمایی کرد، تعداد متغیرهای تصمیم موجود در مدل فوق به دو متغیر ($g_c$ و $T$) تقلیل خواهد یافت، و مدل‌های دومتغیره اعم از خطی یا غیرخطی را به روش ترسیمی به‌راحتی می‌توان حل کرد.

از آن‌جایی‌که بازنمایی ریاضی $x$ و $\overline{g}$ برحسب عیارحد کارخانه معمولاً کار ساده‌ای نیست، لذا برای حل این مدل باید به دنبال روش‌های ابتکاری بود.

## ۲-۳- روش حل مدل در الگوریتم Lane

در الگوریتم Lane برای حل مدل پیش‌گفته روشی ابتکاری ارایه شده است. در این روش ابتدا درسه مرحله، و هر بار با فعال نگه‌داشتن یکی از محدودیت‌ها و غیرفعال کردن دو محدودیت دیگر، سه عیار محدودکننده اقتصادی $g_m$، $g_h$ و $g_k$ محاسبه شده، و سپس با برقراری تعادل عملیاتی بین معدن‌کاری- فرآوری، فرآوری- بازار و معدن‌کاری- بازار سه عیار متعادل کننده $g_{mh}$، $g_{hk}$ و $g_{mk}$ تعیین می‌گردد. در نهایت ازبین این ۶ عیار محاسبه شده عیاری که در منطقه موجه همه محدودیت‌ها قرار داشته و در تمام آن‌ها صدق کند، به عنوان عیارحد بهینه انتخاب می‌گردد. [۹]

**الف- محاسبه عیارهای محدودکننده**

برای محاسبه $g_m$ فرض می‌شود که فقط محدودیت معدن‌کاری فعال بوده و محدودیتی در رابطه با ظرفیت کارخانه و بازار وجود ندارد. اگر فقط محدودیت معدن‌کاری فعال باشد با توجه به این‌که حداکثر ظرفیت معدن‌کاری $M$ است، مقدار $T$ برابر خواهد بود با:

$$T = \frac{1}{M}$$

بنابراین تابع هدف رابطه (۹) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$P_m = (p-k)u - m - hx - \frac{(F+f)}{M}$$

برای بیشینه کردن مقدار $P_m$ مشتق معادله فوق نسبت به $g_c$ برابر صفر قرار داده می‌شود:

$$\frac{dP_m}{dg_c} = (p-k)\frac{du}{dg_c} - h\frac{dx}{dg_c} = (p-k)\frac{d\left(y\bar{g}x\right)}{dg_c} - h\frac{dx}{dg_c}$$

در روش حل Lane مقدار $\bar{g}$ نسبت به $g_c$ ثابت فرض شده، و رابطه فوق به‌صورت ساده زیر درمی‌آید:

$$\frac{dP_m}{dg_c} = \left[y\bar{g}(p-k) - h\right]\frac{dx}{dg_c}$$

با معادل صفر قرار دادن این مشتق رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$g_m = \bar{g} = \frac{h}{y(p-k)}$$

مقادیر $g_h$ و $g_k$ را نیز درست به‌همین ترتیب می‌توان به‌دست آورد. اگر کارخانه محدودیت فعال باشد، $T = \frac{x}{H}$ خواهد شد و با جای‌گذاری این مقدار در تابع هدف و برابر صفر قرار دادن مشتق آن تابع نسبت به عیارحد روابط فوق به‌صورت زیر درخواهد آمد:

$$P_h = (p-k)u - m - hx - \frac{(F+f)}{H}x$$

$$\frac{dP_h}{dg_c} = 0 \Rightarrow g_h = \frac{h + \frac{F+f}{H}}{y(p-k)}$$

اگر فروش محدودیت فعال باشد، $T = \frac{u}{K}$ خواهد شد و با جای‌گذاری این مقدار در تابع هدف و برابر صفر قرار دادن مشتق آن تابع نسبت به عیارحد، رابطه زیر به‌دست خواهد آمد:

$$P_k = (p-k)u - m - hx - \frac{(F+f)}{K}u$$

$$\frac{dP_k}{dg_c} = 0 \Rightarrow g_k = \frac{h}{y\left(p-k-\frac{F+f}{K}\right)}$$

با توجه به این‌که $\bar{g}$ تابع عیارحد $g_c$ است، به‌نظر می‌رسد ثابت فرض کردن آن در محاسبه عیارهای محدودکننده به‌منظور ساده‌سازی حل مسئله صورت گرفته است.

**ب- محاسبه عیارهای متعادل کننده**

با توجه به تعریف عیارهای تعادلی مقدار آن‌ها را می‌توان با جستجو در جدول عیار- تناژ معدن به‌دست آورد. طبق رابطه (۵) برای عیار تعادلی معدن‌کاری- کارخانه می‌توان نوشت:

$$x = \frac{H}{M} \Rightarrow \frac{Q_h}{Q_m} = \frac{H}{M} \Rightarrow$$

$$Q_h = \frac{H}{M}Q_m \Leftrightarrow g_{mh}$$

یعنی در جدول عیار- تناژ، عیارحدی که رابطه فوق را بین $Q_m$ و $Q_h$ برقرار کند، عیار تعادلی معدن‌کاری- کارخانه است.

به همین ترتیب برای دو عیار تعادلی دیگر روابط زیر به‌دست می‌آید:

عیار تعادلی کارخانه- بازار: $$Q_k = \frac{K}{H}Q_h \Leftrightarrow g_{hk}$$

عیار تعادلی معدن‌کاری- بازار: $$Q_k = \frac{K}{M}Q_m \Leftrightarrow g_{mk}$$

پس از محاسبه ۶ عیار پیش‌گفته، از تقاطع دوبه‌دو عملیات‌ها سه عیار جدید طبق روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$G_{mh} = \text{median}\left(g_m, g_{mh}, g_h\right)$$
$$G_{hk} = \text{median}\left(g_h, g_{hk}, g_k\right)$$
$$G_{mk} = \text{median}\left(g_m, g_{mk}, g_k\right)$$

در نهایت عیارحد بهینه نهایی از بین سه عیار اخیر انتخاب می‌شود:

$$g_{opt} = \text{median}\left(G_{mh}, G_{hk}, G_{mk}\right)$$

## ۳- رویکرد جدید پیشنهادی برای حل مدل

بسته به رابطه بین سه مؤلفه محدودیت مدل ۱۱ تابع هدف را می‌توان در فواصل مختلف به سه تابع هدف به‌صورت زیر تفکیک کرد:

الف- اگر $\frac{x}{H} \ge \frac{1}{M}$ و $\frac{u}{K} \ge \frac{1}{M}$ باشد، محدودیت معدن‌کاری گلوگاه عملیات خواهد بود، و تابع هدف به‌صورت زیر درخواهد آمد:

$$P_m = (p-k)u - m - hx - \frac{(F+f)}{M}$$

از طرف دیگر:

$$\frac{1}{M} \ge \frac{x}{H} \Rightarrow x \le \frac{H}{M}$$

با توجه به رابطه ۵ و نظر به نزولی بودن $x$ نسبت به عیارحد می‌توان نتیجه گرفت:

$$x \le \frac{H}{M} \Leftrightarrow g_c \ge g_{mh}$$

به همین ترتیب:

$$\frac{1}{M} \ge \frac{u}{K} \Rightarrow u \le \frac{K}{M}$$

با توجه به رابطه ۶ و نظر به نزولی بودن $u$ نسبت به عیارحد می‌توان نوشت:

$$u \le \frac{K}{M} \Leftrightarrow g_c \ge g_{mk}$$

از جمع‌بندی بحث‌های فوق نتیجه می‌شود:

$$P_m = (p-k)u - hx - \left[\frac{(F+f)}{M} + m\right] \qquad (۱۲)$$
$$s.t. \quad g_c \ge \max\left(g_{mh}, g_{mk}\right)$$

ب- اگر $\frac{x}{H} \ge \frac{1}{M}$ و $\frac{x}{H} \ge \frac{u}{K}$ باشد، محدودیت کارخانه گلوگاه عملیات خواهد بود، و تابع هدف به‌صورت زیر درخواهد آمد:

$$P_h = (p-k)u - m - hx - \frac{(F+f)x}{H}$$

از طرف دیگر:

$$\frac{x}{H} \ge \frac{1}{M} \Rightarrow x \ge \frac{H}{M}$$

با توجه به رابطه (۵) و نظر به نزولی بودن $x$ نسبت به عیارحد می‌توان نتیجه گرفت:

$$x \ge \frac{H}{M} \Leftrightarrow g_c \le g_{mh}$$

به همین ترتیب:

$$\frac{x}{H} \ge \frac{u}{K} \Rightarrow \frac{u}{x} \le \frac{K}{H}$$

با توجه به رابطه ۷ و نظر به صعودی بودن $\frac{u}{x} = y\bar{g}$ نسبت به عیارحد می‌توان نوشت:

$$\frac{u}{x} \le \frac{K}{H} \Leftrightarrow g_c \le g_{hk}$$

بنابراین، نتیجه می‌شود:

$$P_h = (p-k)u - \left[h + \frac{(F+f)}{H}\right]x - m \qquad (۱۳)$$
$$s.t. \quad g_c \le \min\left(g_{hk}, g_{mk}\right)$$

ج- اگر $\frac{u}{K} \ge \frac{1}{M}$ و $\frac{u}{K} \ge \frac{x}{H}$ باشد، محدودیت فروش گلوگاه عملیات خواهد بود، و تابع هدف به‌صورت زیر درخواهد آمد:

$$P_k = (p-k)u - m - hx - \frac{(F+f)u}{K}$$

از طرف دیگر:

$$\frac{u}{K} \ge \frac{1}{M} \Rightarrow u \ge \frac{K}{M}$$

با توجه به رابطه (۶) و نظر به نزولی بودن $u$ نسبت به عیارحد می‌توان نتیجه گرفت:

$$u \ge \frac{K}{M} \Leftrightarrow g_c \le g_{mk}$$

به همین ترتیب:

$$\frac{u}{K} \ge \frac{x}{H} \Rightarrow \frac{u}{x} \ge \frac{K}{H}$$

با توجه به رابطه (۷) و نظر به صعودی بودن $\frac{u}{x} = y\bar{g}$ نسبت به عیارحد می‌توان نوشت:

$$\frac{u}{x} \ge \frac{K}{H} \Leftrightarrow g_c \ge g_{hk}$$

بنابراین، نتیجه می‌شود:

$$P_k = \left[p - k - \frac{(F+f)}{K}\right]u - hx - m \qquad (۱۴)$$
$$s.t. \quad g_{hk} \le g_c \le g_{mk}$$

به‌عبارت دیگر مدل ۱۱ به‌صورت یک تابع هدف سه ضابطه‌ای درمی‌آید، که باید بیشینه گردد. این شکل جدید از مدل را می‌توان به‌صورت زیر بازنمایی کرد:

$$\max P = \begin{cases} P_m & g_c \ge \max\left(g_{mh}, g_{mk}\right) \\ P_h & g_c \le \min\left(g_{mh}, g_{hk}\right) \\ P_k & g_{hk} \le g_c \le g_{mk} \end{cases} \qquad (۱۵)$$

بنابراین، کافیست مقدار تابع هدف به‌ازای عیارحدهای مختلف طبق رابطه فوق محاسبه شود. بیش‌ترین مقدار به دست آمده برای این تابع هدف متناظر عیارحد بهینه خواهد بود.

## ۴- مثال

مشخصات مواد موجود در درون یک کاواک طراحی شده در جدول ۱ و اطلاعات اقتصادی و محدودیت‌های مربوطه در جدول ۲ نشان داده شده است. هدف تعیین عیارحد کارخانه به‌نحوی است که نقدینگی کل حاصل از عملیات بیشینه گردد. (از هزینه فرصت صرف‌نظر شده است.)

**جدول ۱: مشخصات مواد درون کاواک طراحی شده**

| محدوده عیاری (درصد) | تناژ مواد (هزارتن) | میانگین عیار (درصد) |
|---|---|---|
| >۳ | ۳۵/۱۳ | ۳/۵۵ |
| ۲/۵-۳ | ۷۳/۰۷ | ۲/۷۷ |
| ۲-۲/۵ | ۲۲۵/۰۷ | ۲/۲۵ |
| ۱/۵-۲ | ۶۹۳/۲۷ | ۱/۷۲ |
| ۱-۱/۵ | ۲۱۳۵/۴۳ | ۱/۲۰ |
| ۰/۵-۱ | ۶۵۷۷/۶۰ | ۰/۶۷ |
| ۰/۳-۰/۵ | ۵۵۳۵/۱۲ | ۰/۳۵ |
| <۰/۳ | ۱۴۷۲۵/۳۱ | ۰/۰۷ |

**حل:**

در جدول ۳ متغیرهای لازم مدل با استفاده از مقادیر جدول ۱ محاسبه شده است.

**جدول ۲: اطلاعات اقتصادی و عملیاتی معدن**

| پارامتر | مقدار |
|---|---|
| راندمان $(y)$ | ۸۰ درصد |
| هزینه معدن‌کاری $(m)$ | ۱ دلار بر تن |
| هزینه فرآوری $(h)$ | ۳ دلار بر تن |
| هزینه پس از فرآوری $(k)$ | ۰/۴ دلار بر کیلوگرم محصول |
| هزینه ثابت $(f)$ | ۶۰۰ هزار دلار در سال |
| قیمت فروش $(p)$ | ۱ دلار بر کیلوگرم محصول |
| ظرفیت معدن‌کاری $(M)$ | ۲ میلیون تن در سال |
| ظرفیت کارخانه $(H)$ | ۱ میلیون تن در سال |
| تقاضای محصول $(K)$ | ۶۰۰۰ تن در سال |

برای به دست آوردن پاسخ ابتدا مقادیر $g_{hk}$، $g_{mh}$ و $g_{mk}$ را محاسبه می‌کنیم. طبق تعریف $g_{mh}$ عیارحد متناظر نقطه‌ای است که در آن‌جا $x=\frac{H}{M}=0.5$ باشد. طبق جدول ۳ این نقطه بین عیارهای حد ۰/۳ و ۰/۵ درصد قرار دارد. با درون‌یابی نتیجه تقریبی زیر به‌دست می‌آید:

$$g_{mh}=0.308 \text{ درصد}$$

**جدول ۳: اطلاعات مربوط به متغیرهای مدل**

| $g_c$ | $Q_h$ | $\bar{g}$ | $x$ | $u$ $(kg/t)$ | $\frac{u}{x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۳ | ۳۵/۱۳ | ۳/۵۵ | ۰/۰۰۱ | ۰/۰۳۳ | ۲۸/۴۰ |
| ۲/۵ | ۱۰۸/۲۰ | ۳/۰۲۵ | ۰/۰۰۴ | ۰/۰۸۷ | ۲۴/۲۰ |
| ۲ | ۳۳۳/۲۷ | ۲/۵ | ۰/۰۱۱ | ۰/۲۲۲ | ۲۰/۰ |
| ۱/۵ | ۱۰۲۶/۵۴ | ۱/۹۷۵ | ۰/۰۳۴ | ۰/۵۴۱ | ۱۵/۸۰ |
| ۱ | ۳۱۶۱/۹۸ | ۱/۴۵ | ۰/۱۱۵ | ۱/۲۲۳ | ۱۱/۶۰ |
| ۰/۵ | ۹۷۳۹/۵۷ | ۰/۹۲۵ | ۰/۳۲۵ | ۲/۴۰۲ | ۷/۴۰ |
| ۰/۳ | ۱۵۲۷۴/۶۹ | ۰/۷۱۵ | ۰/۵۰۹ | ۲/۹۱۲ | ۵/۷۲ |
| ۰ | ۳۰۰۰۰ | ۰/۴ | ۱ | ۳/۲۰۰ | ۳/۲۰ |

به همین ترتیب طبق تعریف، $g_{hk}$ عیارحد متناظر نقطه‌ای است که در آن‌جا $\frac{u}{x}=\frac{K}{H}=6$ باشد. طبق جدول ۳ این نقطه بین عیارهای حد ۰/۳ و ۰/۵ درصد قرار دارد. با درون‌یابی به نتیجه تقریبی زیر می‌رسیم:

$$g_{hk}=0.333 \text{ درصد}$$

به همین ترتیب طبق تعریف، $g_{mk}$ عیارحد متناظر نقطه‌ای است که در آن‌جا $u=\frac{K}{M}=3$ باشد. طبق جدول ۳ این نقطه بین عیارهای حد صفر و ۰/۳ درصد قرار دارد. با درون‌یابی نتیجه تقریبی زیر حاصل می‌شود:

$$g_{mk}=0.260 \text{ درصد}$$

ابتدا مسئله به روش Lane حل می‌شود. طبق روابط پیش‌گفته:

$$g_m=\frac{h}{y\,(p-k)}=0.234$$

$$g_h=\frac{h+\frac{F+f}{H}}{y\,(p-k)}=0.281$$

$$g_k=\frac{h}{y\left(p-k-\frac{F+f}{K}\right)}=0.25$$

نتیجه پاسخ روش Lane درجدول ۴ نشان داده شده است.

برای حل مسئله به روش ارایه شده در این مقاله، با جای‌گذاری مقادیر عیارهای تعادلی در تابع هدف مدل ۱۵ این مدل به صورت زیر درمی‌آید:

$$\max P = \begin{cases} P_m & g_c \geq 0.308 \\ P_h & g_c \leq 0.308 \\ P_k & 0.333 \leq g_c \leq 0.260 \end{cases}$$

جدول ۴: نتایج محاسبات الگوریتم Lane

| | |
|---|---|
| $g_m$ | ۰/۲۳۴ درصد |
| $g_h$ | ۰/۲۸۱ درصد |
| $g_k$ | ۰/۲۵ درصد |
| $g_{mh}$ | ۰/۳۰۸ درصد |
| $g_{hk}$ | ۰/۳۳۳ درصد |
| $g_{mk}$ | ۰/۲۶۰ درصد |
| عیار حد بهینه ( $g_{opt}$ ) | ۰/۲۸۱ درصد |

در رابطه فوق محدوده آخر غیرممکن می‌باشد، بنابراین تابع $P_k$ در هیچ محدوده‌ای مؤثر نیست. در نتیجه، تابع هدف نهایی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\max P = \begin{cases} P_m & g_c \geq 0.308 \\ P_h & g_c \leq 0.308 \end{cases}$$

دو تابع $P_m$ و $P_h$ نیز با توجه به معادلات ۱۲ و ۱۳ از روابط زیر به دست می‌آید:

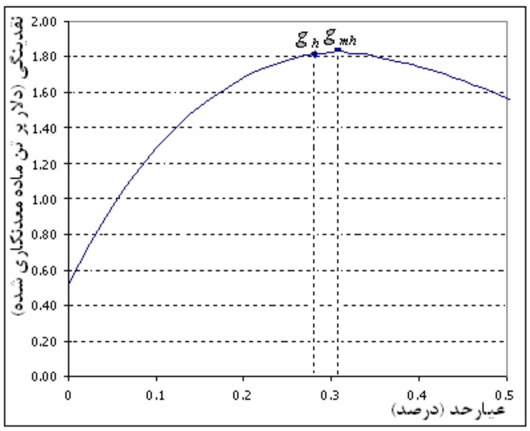
$$P_m = 0.8u - 3x - 1.2$$
$$P_h = 0.8u - 3.5x - 1 \quad (۱۶)$$

جدول ۵ مقدار تابع هدف را در محدوده‌های عیاری موجه نشان می‌دهد. منحنی تغییرات $P$ نسبت به عیارحد در محدوده سود بیشینه نیز در شکل ۱ نشان داده شده است. عیارحد متناظر بیشترین مقدار نقدینگی یعنی عیار بهینه به دست آمده به این روش $g_c = 0.308$ درصد می‌باشد.

همان‌طوری که دیده می‌شود عیارحد بهینه به دست آمده در روش Lane معادل عیارحد محدودکننده فرآوری $(g_h = 0.281)$ است، در حالی‌که عیارحد به‌دست آمده در این روش برابر عیارحد تعادلی معدن‌کاری- فرآوری $(g_{mh} = 0.308)$ می‌باشد. نقدینگی حاصل از عیارحد بهینه به دست آمده در این روش حدود ۱ درصد از نقدینگی حاصل از عیارحد بهینه به‌دست آمده به روش Lane بیش‌تر است.

جدول ۵: مقدار تابع هدف در محدوده‌های مختلف عیاری

| $g_c$ | $P$ مؤثر | $x$ | $u$ | مقدار $P$ |
|---|---|---|---|---|
| ۳ | $P_m$ | ۰/۰۰۱ | ۰/۰۶۷ | -۱/۲۵۰ |
| ۲/۵ | $P_m$ | ۰/۰۰۴ | ۰/۱۷۵ | -۱/۱۷۱ |
| ۲ | $P_m$ | ۰/۰۱۱ | ۰/۴۴۴ | -۰/۹۷۸ |
| ۱/۵ | $P_m$ | ۰/۰۳۴ | ۱/۰۸۱ | -۰/۵۳۸ |
| ۱ | $P_m$ | ۰/۱۱۵ | ۲/۴۴۵ | ۰/۳۴۰ |
| ۰/۵ | $P_m$ | ۰/۳۲۵ | ۴/۸۰۵ | ۱/۵۷۰ |
| ۰/۳۰۸ | $\boldsymbol{P_h}$ ،$\boldsymbol{P_m}$ | ۰/۵ | ۵/۷۸۸ | ۱/۸۳۰ |
| ۰/۳ | $P_h$ | ۰/۵۰۹ | ۵/۸۲۴ | ۱/۸۲۷ |
| ۰/۲۸۱ | $\boldsymbol{P_h}$ | ۰/۵۳۱ | ۵/۹۰۸ | ۱/۸۱۵ |
| ۰ | $P_h$ | ۱ | ۶/۴۰۰ | ۰/۵۲۰ |




شکل ۱: منحنی تغییرات میزان سود نسبت به عیارحد

## حل مسئله به روش تحلیلی

این مسئله طوری طراحی شده است که مقادیر $\bar{g}$ و $x$ جدول ۳ را می‌توان با معادلات ریاضی زیر بازنمایی کرد (در این روابط $g_c$ و $\bar{g}$ برحسب درصد، و $x$ برحسب تن بر تن می‌باشد):

$$\bar{g} = 1.05 g_c + 0.4$$
$$x = e^{-2.25 g_c}$$

درنتیجه:

$$u = y\bar{g}x = (8.4 g_c + 3.2) e^{-2.25 g_c}$$ کیلوگرم بر تن

این روابط در توابع هدف سه‌گانه رابطه ۱۶ جایگزین می‌شود:

$$P_m = (13.44 g_c + 2.12) e^{-2.25 g_c} - 1.2$$
$$P_h = (13.44 g_c + 1.62) e^{-2.25 g_c} - 1$$
$$P_k = (12.6 g_c + 1.8) e^{-2.25 g_c} - 1$$

مقادیر $g_m$، $g_h$ و $g_k$ با معادل صفر قرار دادن مشتق توابع فوق نسبت به عیارحد به‌دست می‌آید:

$$\frac{dP_m}{dg_c}=0 \;\Rightarrow\; g_m=0.287$$
$$\frac{dP_h}{dg_c}=0 \;\Rightarrow\; g_h=0.324$$
$$\frac{dP_k}{dg_c}=0 \;\Rightarrow\; g_k=0.302$$

همان طوری که دیده می‌شود مقادیر $g_m$، $g_h$ و $g_k$ به دست آمده در این‌جا با مقادیر به‌دست آمده از روابط پیشین متفاوت است. این تفاوت از ثابت فرض کردن $\overline{g}$ نسبت به $g_c$ در روش Lane ناشی می‌شود. نتایج نهایی حاصل از روش حل تحلیلی در جدول ۶ دیده می‌شود. در این جدول عیار بهینه از بین ۶ عیار محاسبه شده، به روش Lane انتخاب گرفته است.

**جدول ۶: نتایج محاسبات روش حل تحلیلی**

| | |
|---|---|
| $g_m$ | ۰/۲۸۷ درصد |
| $g_h$ | ۰/۳۲۴ درصد |
| $g_k$ | ۰/۳۰۲ درصد |
| $g_{mh}$ | ۰/۳۰۸ درصد |
| $g_{hk}$ | ۰/۳۳۳ درصد |
| $g_{mk}$ | ۰/۲۶۰ درصد |
| عیار حد بهینه ( $g_{opt}$ ) | ۰/۳۰۸ درصد |

همان‌طوری که مشاهده می‌شود عیارحد بهینه به دست آمده به روش تحلیلی نیز مانند روش ارایه شده در این مقاله معادل عیارحد تعادلی معدن‌کاری- فرآوری یعنی ۰/۳۰۸ درصد می‌باشد.

## ۵- نتیجه‌گیری

بهینه‌سازی عیارحد کارخانه یکی از کارهای مرسوم و لازمی است که در مرحله برنامه‌ریزی تولید معادن روباز صورت می‌گیرد. در این مقاله رویکرد جدیدی برای حل مدل Lane که روشی کلاسیک برای تعیین عیارحد بهینه کارخانه است، ارایه گردید. برای این کار مسئله طبق مدل Lane به صورت یک فرآیند سه مرحله‌ای با محدودیت‌های ظرفیت معدن‌کاری، کارخانه فرآوری و بازار صورت‌بندی گردید. سپس با تحلیل روابط بین پارامترها و متغیرهای تصمیم مدل یک روش ابتکاری برای حل آن توسعه داده شد. در نهایت یک مثال عددی یک‌بار به روش Lane و یک‌بار به روش ارایه شده در این مقاله حل شد و نتایج حاصل از این روش‌ها باهم مقایسه شده و اعتبار آن‌ها با حل مسئله به‌روش تحلیلی مورد ارزیابی قرار گرفت. مقایسه نتایج اقتصادی حاصل از دو روش نشان می‌دهد که سود حاصل از عیارحد به دست آمده در روش جدید بیش‌تر از سود حاصل از عیارحد محاسبه شده به روش Lane است. این تفاوت از آن‌جا ناشی می‌شود که در روش Lane مقدار $\overline{g}$ نسبت به $g_c$ ثابت فرض شده است، در حالی که این چنین نبوده و $\overline{g}$ تابعی اکیداً صعودی از $g_c$ می‌باشد.

## منابع

[1] Taylor, H.K., 1972. *General background theory of cut-off grades*, Institution of Mining and Metallurgy Transactions, A160–179.

[2] Taylor, H.K., 1985. *Cut-off grades—some further reflections*. Institution of Mining and Metallurgy Transactions, A204–216.

[3] Asad, M.W.A., 2007. *Optimum cut- off grade policy for open pit mining operations through net present value algorithm considering metal price and cost escalation*, Engineering Computations: International Journal for Computer- Aided Engineering and Software Vol. 24 No. 7: 723- 736

[4] Osanloo, M., Ataei, M., 2003. *Using equivalent grade factors to find the optimum cut- off grades of multiple metal deposits*, Mineral Engineering, 16, pp. 771- 776.

[5] Cairns, Robert D., Shinkuma, Takayoshi, 2004.*The choice of the cut- off grade in mining*, Resources Policy 29, pp. 75-81.

[6] Shinkuma, Takayoshi, Nishiyama, Takashi, 2000. *The grade selection rule of the metal mines; an empirical study on copper mines*, Resources Policy 26: 31- 38.

[7] Shinkuma, Takayoshi, 2000. *A generalization of the Cairns- Krautkraemer model and the optimality of the mining rule*, Resource and Energy Economics 26: 147- 160.

[8] Lane, K.F., 1964. *Choosing the optimum cut-off grade*. Quarterly of the Colorado School of Mines 59 (4), 811–829.

[9] Lane, K.F., 1988. *The Economic Definition of Ore cutoff grades in Theory and Practice*, London: Mining Journal Books

[10] Hustrulid, W., Kuchta, M., 1995. *Open Pit Mine Planning & Design*, A.A.Balkema, Rotterdam, Brookfield.

**زیرنویس‌ها**

1- ultimate pit limits
2- Ore
3- Waste
4- Break- even Cut- off grade
5- K.F. Lane
6- Operations Research (OR)